MATHEMATIQUES

Exercices et Corrigés Révisions (Terminale)

Rappel équations logarithmes et exponentielles

- Fonction logarithme

$$a^b = c \Leftrightarrow b = \ln_a c$$

- Base 10

$$10^b = c \Leftrightarrow b = \log\ c$$

- base e

$$e^b = c \Leftrightarrow b = \ln\ c$$

Exercice No 1 (équations logarithmes et exponentielles)

- *a) Résoudre l'équation :*
- $2e^{2X} + 3e^{x} - 2 = 0$
- *b) Factoriser l'expression :*
- $2e^{2X} + 3e^{x} - 2 = 0$
- *c) Résoudre l'équation*
- $2(\log x)^2 + 3(\log x) - 2 = 0$

Corrigé exercice 1

On pose $\boxed{X = e^x}$

2X²+3X-2

aprim	2	x1	0,5
bprim	3		
cprim	-2		
bprim²	9		
4*aprim*cprim	-16	x2	-2
deltaprim =b²-4ac	25		

$$\boxed{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$\boxed{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Retour à x

X=-2 $\boxed{e^x = -2}$ Sans solution

X=0,5 $\boxed{e^x = 0,5}$ x=ln 1/2 x=-ln 2

Corrigé exercice 1

- $2e^{2X} + 3e^{x} - 2$

- $2x^2 + 3X - 2$
- $=2(x+2)(x-1/2)$

- $2(e^{x}+2)(e^{x}-1/2)$

Corrigé exercice 1

On pose	log x=X		
	$2X^2+3X-2$		
ater	2	x1	0,5
bter	3	$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	
cter	-2		
bter²	9		
4*ater*cter	-16	x2	-2
deltater =b²-4ac	25	$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	
Retour à x			
X=-2	log x=-2	$x=10^{-2}$	x=0,01
X=0,5	log x=0,5	$x=10^{0,5}$	$x=\sqrt{10}$

Exercice No 2 (fonctions, logarithmes et exponentielles)

- *Etudier la fonction*
- $f(x)=\ln(2x+1)-x-0,05$
- *où x est une variable réelle*
- *La fonction modélisant le résultat journalier R(q), exprimé en 10^5 € et en fonction du nombre q de milliers de kilogrammes de poissons frais vendus, lors du 2e semestre dans un supermarché s'écrit* $R(q)=\ln(2q+1)-q-0,05$
- *Déduire de l'étude de la fonction*
- *Le nombre de kilos de poissons qu'il faut vendre chaque jour pour maximiser le résultat journalier*
- *La valeur maximale du résultat journalier (approx centaine d'€)*

Rappel fonctions, logarithmes et exponentielles

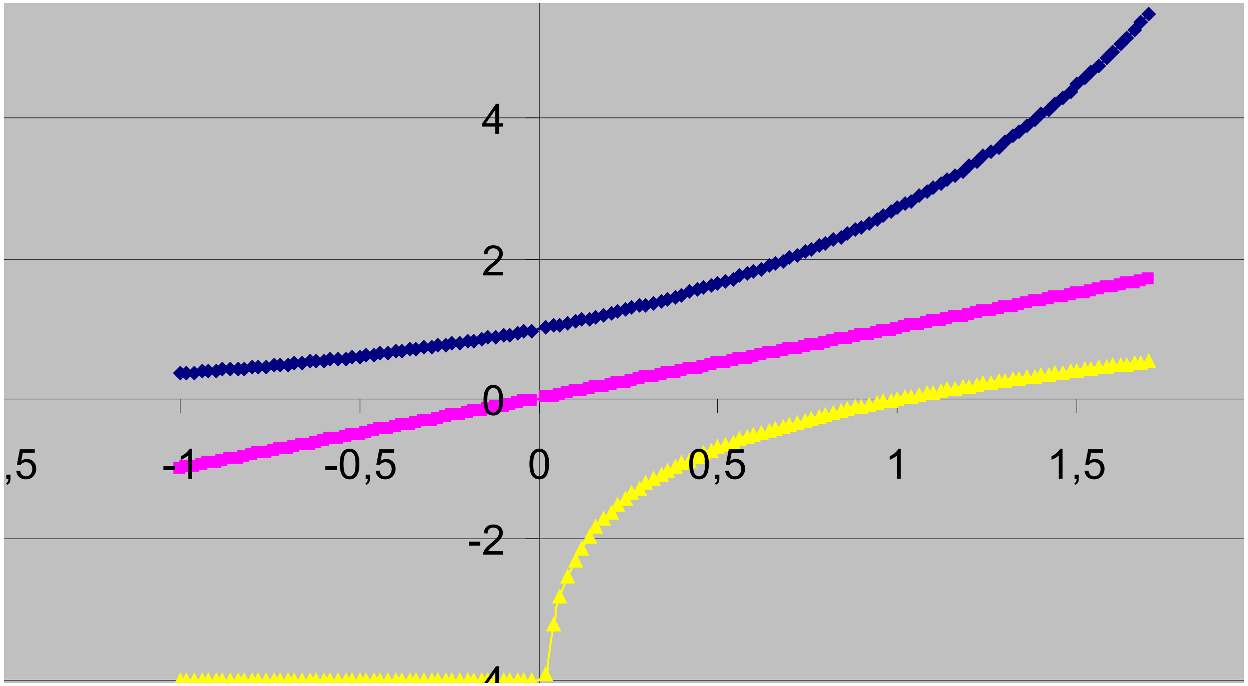
- a^x : exponentielle en base a de x

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

- Base e
- e est un réel 2,718281828
- e est la seule base pour laquelle la fonction exponentielle est égale à sa dérivée
- $f(x) = a^x$
- $f'(x) = (\ln a)*a^x$

Rappel fonctions, logarithmes et exponentielles



y=exp(x)
y=x
y=ln(x)

Corrigé fonctions, logarithmes et exponentielles

- $f(x)=\ln(2x+1)-x-0,05$
- Le domaine de définition $2x+1>0 \Rightarrow D=]-1/2,+\infty]$
- $x \to -1/2$ $\quad 2x-1 \to 0+$ $\quad \ln(2x-1) \to -\infty$
- $\quad -x \to 1/2$ $\quad \ln(2x-1) - x - 0,05 \to -\infty$
- $x \to \infty$ $\quad 2x-1 \to \infty$ $\quad \ln(2x-1) \to \infty$
- $\quad -x \to -\infty$ (beaucoup plus vite)
- $\quad \ln(2x-1) - x - 0,05 \to -\infty$

Corrigé fonctions, logarithmes et exponentielles

- f(x)=ln(2x+1)-x-0,05
- Le domaine de définition 2x+1>0 => D=]-1/2,+∞]

$$f'(x) = \frac{2}{2x+1} - 1 = \frac{-2x+1}{2x+1}$$

- x<1/2 => f'(x)>0 => fonction croissante
- x>1/2 => f'(x) <0 => fonction décroissante
- x=1/2 => f'(x)=0 => maximum f(1/2)=0,143

Corrigé fonctions, logarithmes et exponentielles

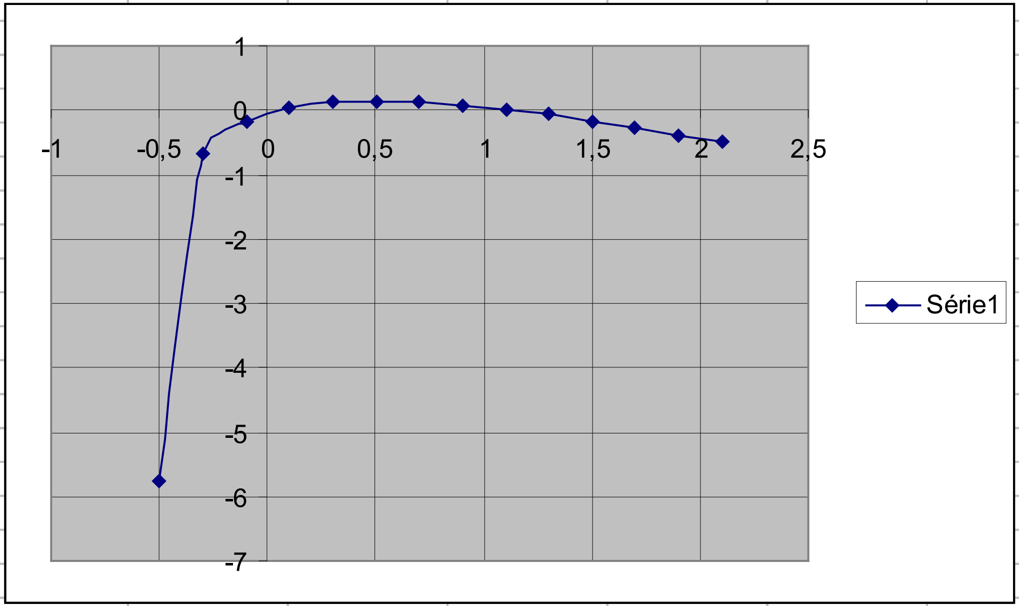
- $f(x)=\ln(2x+1)-x-0,05$
- Le domaine de définition $2x+1>0 \Rightarrow D=]-1/2,+\infty]$

x	-1/2		1/2		+∞
f'(x)		+	0	-	
f(x)	-∞	↗	f(1/2)=0,143	↘	-∞

Corrigé fonctions, logarithmes et exponentielles

- $f(x)=\ln(2x+1)-x-0,05$
- Le domaine de définition $2x+1>0 \Rightarrow D=]-1/2,+\infty]$

	x	f(x)
	-0,499	-5,7656081
	-0,299	-0,66230319
	-0,099	-0,17164667
	0,101	0,03298684
	0,301	0,12025285
	0,501	0,14314668
	0,701	0,12530172
	0,901	0,07933345
	1,101	0,01277561
	1,301	-0,06951075
	1,501	-0,16420576
	1,701	-0,26894102
	1,901	-0,3819675
	2,101	-0,50195683
e	2,71828183	



Corrigé fonctions, logarithmes et exponentielles

- Profit max pour x=1/2 => 500 kg de poissons
- Le profit est alors égal à 14 300 €

Exercice No 3 (suites)

- *Un emprunt d'un montant K est remboursable au moyen de 10 annuités constantes, au taux d'intérêts composés i = 5%*
- *Le montant du premier amortissement est égal à 1000 €*
- *Sachant que, pour ce type d'emprunt, les amortissements sont en progression géométrique de raison (1+i) déterminer :*
- *a) Le montant du 6e amortissement*
- *b) Le montant de l'emprunt*

Corrigé exercice 3

taux	5,00%

1 000,00 €	1
1 050,00 €	2
1 102,50 €	3
1 157,63 €	4
1 215,51 €	5
1 276,28 €	6
1 340,10 €	7
1 407,10 €	8
1 477,46 €	9
1 551,33 €	10
12 577,89 €	

MODE DE CALCUL DIRECT

$$A_6 = A_1 * (1+i)^5$$

=1000*(puissance(1+taux;5))

1 276,28 €

$$K = A_1 * \frac{(1+i)^{10} - 1}{(1+i) - 1}$$

=1000*(Puissance((1+taux);10)-1)/(1+ta&ux-1)

12 577,89 €

Exercice No 4 (suites)

- *On considère que l'équation liant le nombre d'inscriptions chaque jour dans un centre de formation en fonction du numéro x du jour peut être modélisé par la fonction*

  $y = f(x) = 30 * 0,8^x$

- *Etudier la fonction sur l'ensemble des nombres réels*
- *Soient les nombres y1, y2, ..., yi, ..., y8 d'inscription aux 1er , 2^e, ..., i^e, ..., 8^e jours*
- *Caractériser la suite des yi en précisant le type de la suite, le nombre de termes, la raison de la progression, la valeur du premier terme*
- *Combien d'inscriptions comptera-t-on pour cette formation à l'issue des 8 jours d'inscriptions.*

Corrigé exercice No 4

- La fonction

  $y = f(x) = 30 * 0,8^x$

- est une fonction exponentielle de base 0,8
- définie de $-\infty$ à $+\infty$
- Limites
  - $x \to \infty \quad y \to 0$
  - $x \to -\infty \quad y \to \infty$
- Dérivée
- $f'(x)=30*\ln 0,8*0,8^x$
- Toujours décroissant

Corrigé exercice No 4

- La fonction

  $y = f(x) = 30 * 0{,}8^x$

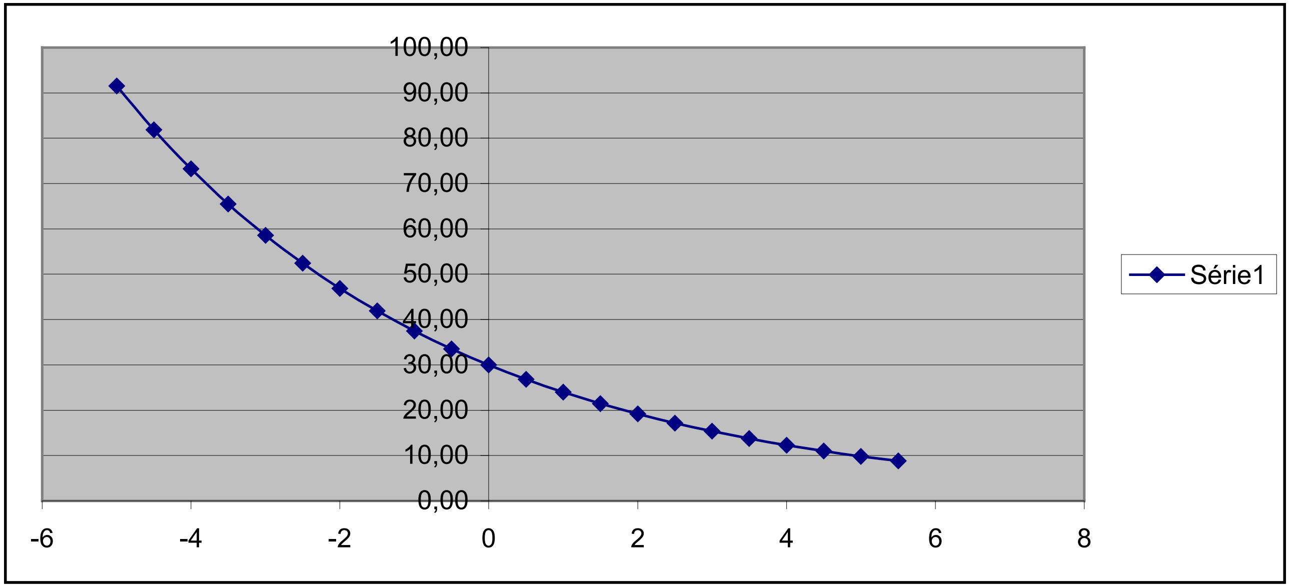
x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		-	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	0

Corrigé exercice No 4

- La fonction

$$y = f(x) = 30 * 0{,}8^x$$

x	f(x)
-5	91,55
-4,5	81,89
-4	73,24
-3,5	65,51
-3	58,59
-2,5	52,41
-2	46,88
-1,5	41,93
-1	37,50
-0,5	33,54
0	30,00
0,5	26,83
1	24,00
1,5	21,47
2	19,20
2,5	17,17
3	15,36
3,5	13,74
4	12,29
4,5	10,99
5	9,83
5,5	8,79



Corrigé exercice No 4

- Nature de la suite des yi
- $yi=30*0,8^{i}$

- $yi=30*0,8^{i+1}$

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = \frac{30 * 0,8^{i+1}}{30 * 0,8^{i}} = 0,8$$

- Le rapport entre 2 termes consécutifs de la suite est un constante, la suite des yi est donc une suite géométrique de raison 0,8. Cette progression compte 8 termes, le premier est $y1=30*0,8^{1}=24$

Corrigé exercice No 4

- On utilise la formule la formule de la somme des 8 premiers termes d'une suite géométrique de raison 0,8

$$S = y_1 \frac{0{,}8^8 - 1}{0{,}8 - 1} = 100$$

- Soit 100 inscriptions à l'issue des 8 jours d'inscription

Exercice No 5 (fonctions, log et exp)

- *La fonction f est définie sur R par*
- $f(x)=(x-2)e^{x}+3$
- *Soit C la représentation graphique*
- *Déterminer la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$*
- *Déterminer la limite de f(x) quand x tend vers $-\infty$*
- *Soit D la droite d'équation y=3. Etudier les positions relatives de C et de D*
- *Calculer f'(x)*
- *Dresser le tableau de variation de f*
- *En déduire, en fonction du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation f(x)=m*

Corrigé exercice No 5

- La fonction
- $f(x)=(x-2)e^x+3$

- définie de $-\infty$ à $+\infty$
- Limites
  - $x \to \infty$ $y \to \infty$
  - $x \to -\infty$ $y \to 3$
- Dérivée
- $f'(x)=(x-2)e^x+1*e^x=e^x(x-1)$

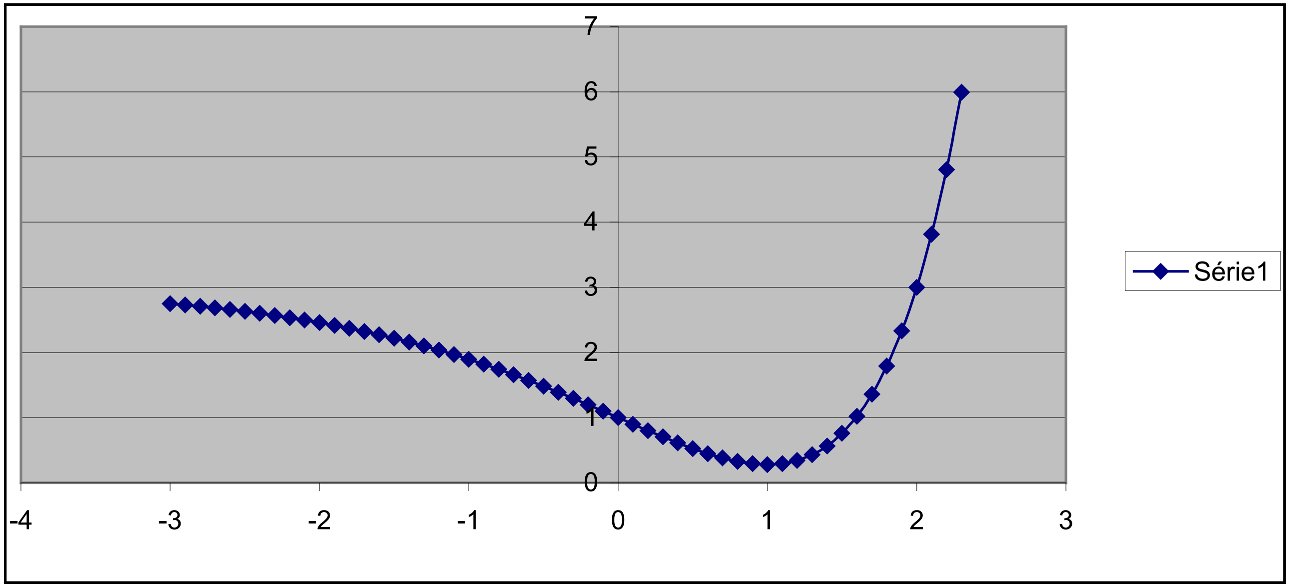
Corrigé exercice No 5

- La fonction
- $f(x)=(x-2)e^x+3$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	3	$\searrow$	$f(1)=-e+3$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice No 5 (fonctions, log et exp)

x	f(x)
-3	2,75106466
-2,9	2,73038622
-2,8	2,7081117
-2,7	2,68413409
-2,6	2,65834154
-2,5	2,63061751
-2,4	2,60084101
-2,3	2,56888697
-2,2	2,53462673
-2,1	2,49792864
-2	2,45865887
-1,9	2,41668239
-1,8	2,37186422
-1,7	2,32407096
-1,6	2,27317254
-1,5	2,21904444
-1,4	2,16157032
-1,3	2,10064508
-1,2	2,03617852
-1,1	1,96809964
-1	1,89636168
-0,9	1,82094799
-0,8	1,7418789
-0,7	1,65921968
-0,6	1,57308975
-0,5	1,48367335
-0,4	1,39123189
-0,3	1,29611809
-0,2	1,19879234



Corrigé exercice No 5

- Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ est égal au nombre de points d'intersections entre la courbe représentative de f et la droite horizontale d'équation $y=m$

Exercice No 6 (Proba conditionnelles)

- *On vend dans un magasin deux marques de bière A et B*
- *On estime à 0,8 la probabilité qu 'un client, choisi au hasard, achète la bière A et 0,2 la probabilité qu'il achète la bière B*
- *Cinq amateurs de bière se présentent au magasin*
- *On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de clients qui sur les cinq achètent la bière A*
- *Donner la loi de X, son espérance mathématique et sa variance*

Corrigé exercice No 6

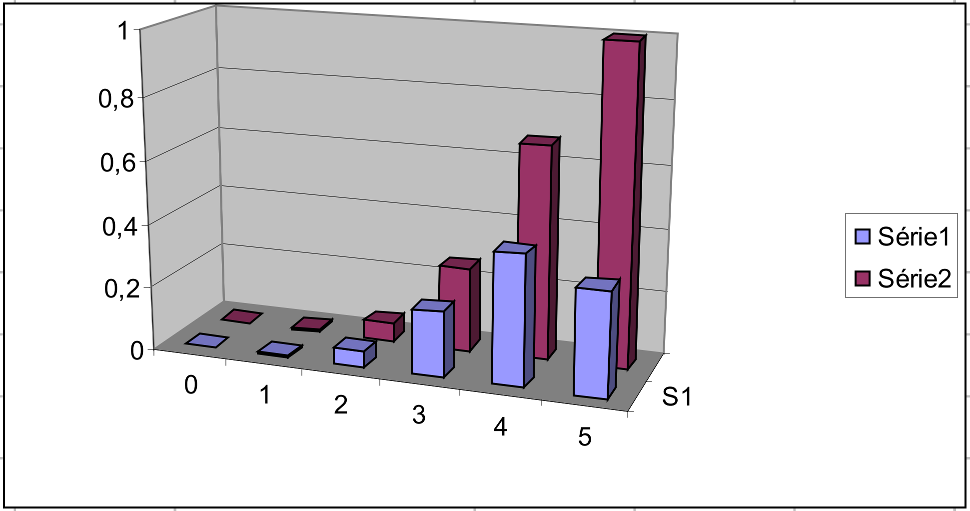
- La probabilité P_k d'avoir k clients achetant A au cours de ces 5 épreuves (qui est aussi la probabilité d'obtenir 5-k clients achetant B) est :

$$P_k = C_5^k \, 0{,}8^k \, 0{,}2^{5-k} \quad (0 <= k <= 5)$$

- La loi de probabilité correspondante est une **loi binomiale B(5, 0,8)**
- Son espérance mathématique : np = 5 * 0,8 = 4
- Sa variance : npq = 5 * 0,8 * 0, 2 = 0,8

Corrigé exercice No 6

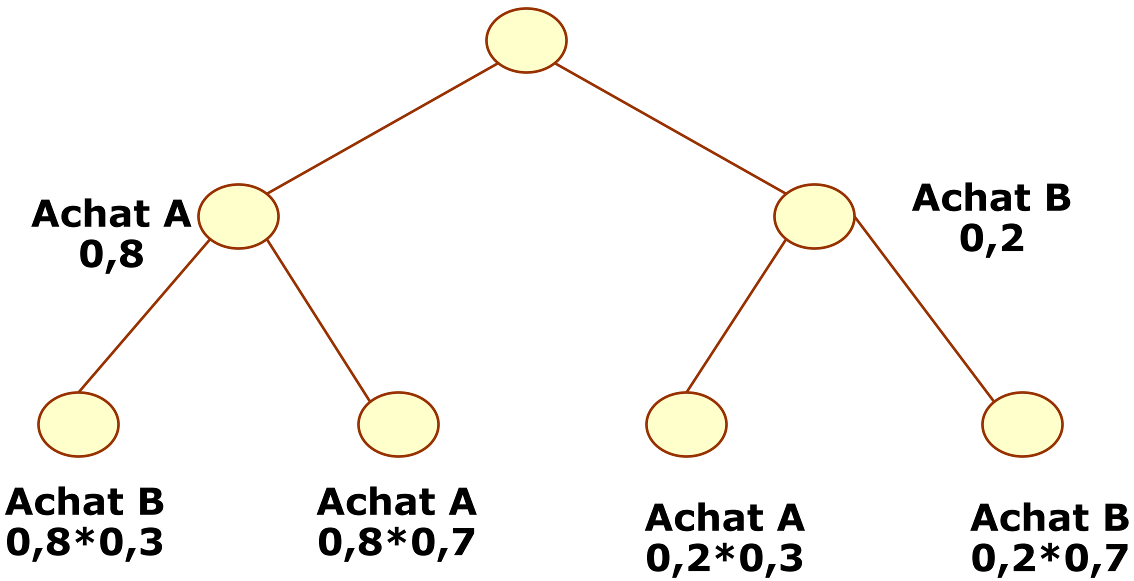
		•**B(5, 0,8)**		Epreuves	5	
				Proba	0,8	
0	0,0003	0,00032				
1	0,0067	0,0064				
2	0,0579	0,0512				
3	0,2627	0,2048				
4	0,6723	0,4096				
5	1	0,32768				



Exercice No 6

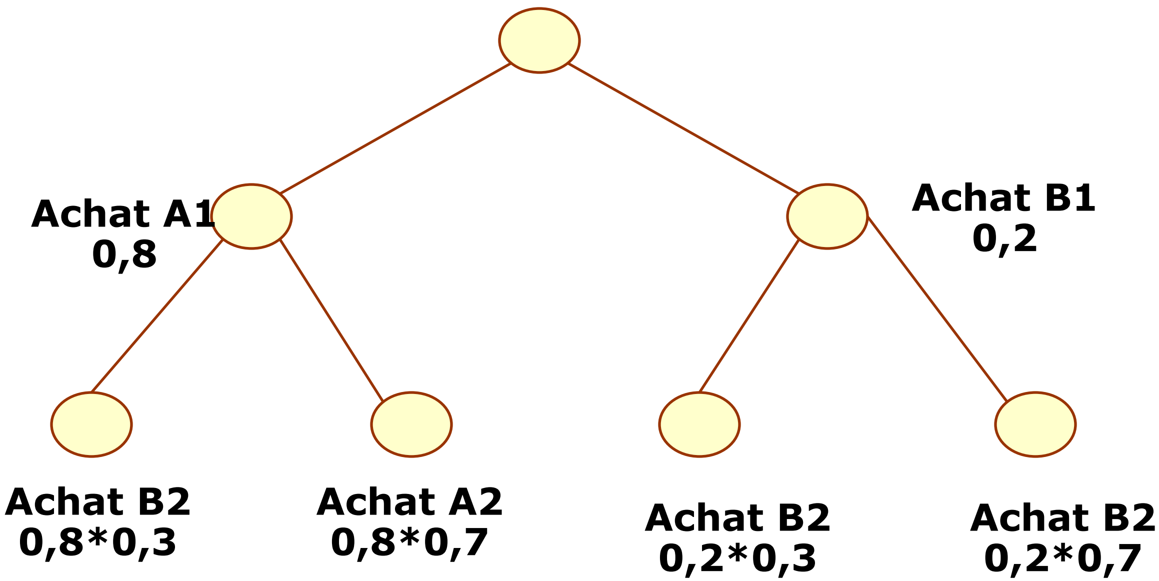
- *On admet qu'il y a une probabilité égale à 0,7 qu'un client reste fidèle à la dernière marque achetée.*
- *Un même client se présente deux fois de suite dans le magasin*
- *Quelle est la probabilité qu'il achète les deux fois la bière A ?*
- *Quelle est la probabilité qu'il ait acheté la première fois la bière A sachant qu'il achète la bière B la deuxième fois ?*

Corrigé exercice No 6



- Quelle est la probabilité qu'il achète les deux fois la bière A ? 0,56
- Quelle est la probabilité qu'il ait acheté la première fois la bière A sachant qu'il achète la bière B la deuxième fois ?
- P(A1/B2) = P(A1 ET B2)/P(B2)

Corrigé exercice No 6



- P(A1/B2) = P(A1 ET B2)/P(B2)
- = P(A1 ET B2) / P(A1 ET B2) + P(B1 ET B2)
- = 0,8*0,3 / 0,8*0,3 + 0,2*0,7 = 0,63

Exercice No 7 (Approx. loi binomiale)

- *Une entreprise fabrique et commercialise des produits de consommation courante en très grand nombre.*
- *Il y a une probabilité constante égale à 0,1 qu'un article choisi au hasard dans la production ne satisfasse pas aux normes imposées*
- *On prélève au hasard 10 articles*
- *Quelle probabilité qu'il y ait au moins un article non conforme parmi les 10 ?*

Corrigé exercice No 7

- La probabilité P_k d'avoir k articles non conformes au cours de ces 10 épreuves (qui est aussi la probabilité d'obtenir 10-k articles conformes) est :

$$P_k = C_{10}^k \, 0{,}1^k \, 0{,}9^{10-k} \quad (0<=k<=10)$$

- La loi de probabilité correspondante est une **loi binomiale B(10, 0,1)**
- Son espérance mathématique : np = 10 * 0,1 = 1
- Sa variance : npq = 10 * 0,1 * 0, 9 = 0,9

Corrigé exercice No 7

- Quelle probabilité qu'il y ait au moins un article non conforme parmi les 10 ?
- P(1)+P(2)+...+ P(10)
- 1-P(0)
- =0,6513

n	10		
p	0,1		
0	0,34868	0,34868	
1	0,38742	0,73610	
2	0,19371	0,92981	
3	0,05740	0,98720	
4	0,01116	0,99837	
5	0,00149	0,99985	
6	0,00014	0,99999	
7	0,00001	1,00000	
8	0,00000	1,00000	
9	0,00000	1,00000	
10	0,00000	1,00000	
	0,65132		
		0,65132	

Exercice No 7 (Approx. loi binomiale)

- *On prélève au hasard 50 articles*
- *Soit X le nombre d'articles non conformes parmi ces 50 articles*
- *Indiquer la loi suivie par X*
- *Montrer que cette loi peut être approchée par une autre loi que l 'on précisera*
- *A l'aide de cette loi, calculer la probabilité qu'il y ait au moins 5 articles non conformes parmi ces 50 articles*

Corrigé exercice No 7

- La probabilité P_k d'avoir k articles non conformes au cours de ces 50 épreuves (qui est aussi la probabilité d'obtenir 50-k articles conformes) est :

$$P_k = C_{50}^k \, 0{,}1^k \, 0{,}9^{50-k} \quad (0 <= k <= 50)$$

- La loi de probabilité correspondante est une **loi binomiale B(50, 0,1)**
- **$p<=0{,}1$, $n>=30$, $np(1-p)=4{,}5 < 9$, $np = 5<15 => \mathcal{P}(np)$**
- Poisson (5)

Corrigé exercice No 7

- A l'aide de cette loi, calculer la probabilité qu'il y ait au moins 5 articles non conformes parmi ces 50 articles
- P = 1 – P(0) – P(1) – P(2) – P(3) – P(4) = 0,5595

n	50			
p	0,1			
0	0,00515	0,00515	**0,006738**	
1	0,02863	0,03379	**0,03369**	
2	0,07794	0,11173	**0,084224**	
3	0,13857	0,25029	**0,140374**	
4	0,18090	0,43120	**0,175467**	**0,4404933**
5	0,18492	0,61612	**0,175467**	
6	0,15410	0,77023	**0,146223**	**0,5595067**
7	0,10763	0,87785	**0,104445**	
8	0,06428	0,94213	**0,065278**	
9	0,03333	0,97546	**0,036266**	
10	0,01518	0,99065	**0,018133**	

Exercice No 7 (Approx. loi binomiale)

- *On prélève au hasard 500 articles*
- *Soit X le nombre d'articles non conformes parmi ces 500 articles*
- *Indiquer la loi suivie par X*
- *Montrer que cette loi peut être approchée par une autre loi que l 'on précisera*
- *A l'aide de cette loi, calculer la probabilité qu'il y ait au moins 50 articles non conformes parmi ces 500 articles*

Corrigé exercice No 7

- La probabilité P_k d'avoir k articles non conformes au cours de ces 500 épreuves (qui est aussi la probabilité d'obtenir 500-k articles conformes) est :

$$P_k = C_{500}^{k}\ 0{,}1^{k}\ 0{,}9^{500-k} \quad (0<=k<=500)$$

- La loi de probabilité correspondante est une **loi binomiale B(500, 0,1)**
- **n>=30, p<=0,1, np(1-p)=45 > 9** => Loi $\mathcal{N}$**(m, σ)**
- N (50, $(45)^{1/2}$)

Corrigé exercice No 7

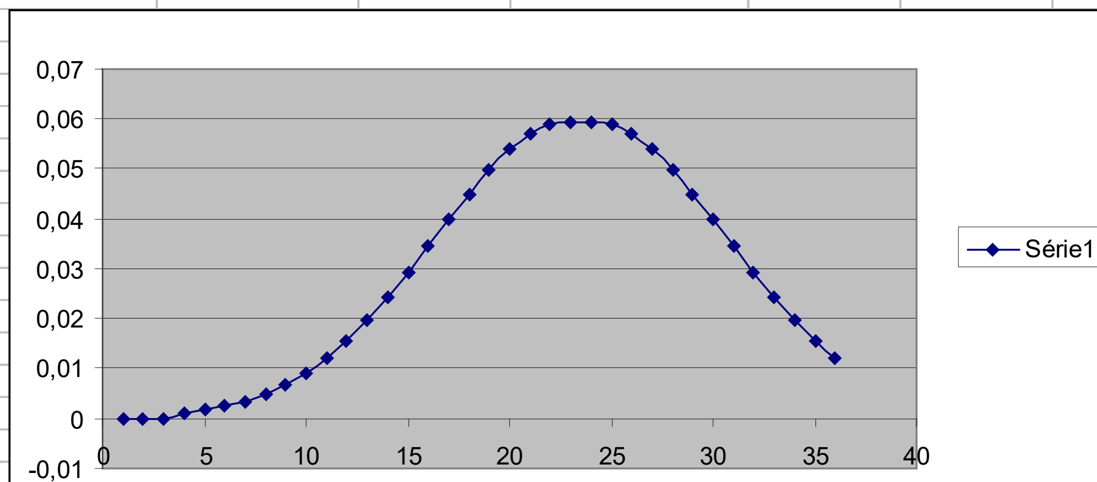
- A l’aide de cette loi, calculer la probabilité qu’il y ait au moins 50 articles non conformes parmi ces 500 articles
- La fonction binomiale peut être approchée par une loi normale mais ceci revient à remplacer une variable discrète par une variable continue, donc à définir un rectangle dans le système de coordonnées de la courbe représentative, rectangle dont la base, de largeur = 1, est centrée sur une valeur x, et dont la hauteur est P(x).
- Le coin bas-gauche est donc d’abcisse x-1/2
- P(X>=50) estimé avec Binomiale devient donc P(X>=49,5) estimé avec Normale

Corrigé exercice No 7

- P(X>=49,5) estimé avec Normale
- Avec une variable centrée réduite
- $P(T>= 49{,}5-50/(45)^{1/2})$
- =0,5297

Corrigé exercice No 7

• N (50, $(45)^{1/2}$)			m	50		sigma	6,71	T	-0,07454
1	1,54274E-13								
2	4,53278E-13								
3	1,30253E-12								
31	0,00107721								
32	0,001624964								
33	0,002397375								
34	0,003459213								
35	0,004881661								
36	0,006737627								
37	0,009094845								
38	0,012006948								
39	0,015503116								
40	0,019577372								
41	0,024179024								
42	0,029206006								
43	0,03450282								
44	0,039864472								
45	0,04504706								
46	0,049784701								
47	0,053811409								
48	0,056885533								
49	0,058813675								
49,5	0,059306	0,47029	0,52971		0,5299				
50	0,059470804								



Exercice No 7 (Approx. loi binomiale)

- *Le coût de revient d'un article est de 20 F et le prix de vente de 30 F, pour l'hypothèse de fabrication envisagée (500)*
- *Le client ne règle pas les articles non conformes*
- *Exprimer le bénéfice en fonction de X*
- *Calculer l'espérance et l'écart-type du bénéfice*

Corrigé exercice No 7

- B Bénéfice

$B = 10\ (500 - x) - 20X$

$= 5000 - 30\ X$

$E(B) = 5000 - 30\ e(X)$

$= 5000 - 30 * 50 = 3500$

$Sigma(B) = -\ 30\ sigma = 201{,}25$

Exercice 8 (Proba géné)

- *Un club informatique est composé de 500 adhérents*
- *260 sont inscrits à l'activité Jeux*
- *140 à l'activité "Initiation jeunes", incompatible avec les autres activités.*
- *80 à l'activité "Création multimédia"*
- *40 ne sont inscrits à aucune activité.*
- *On tire au hasard un adhérent au club.*
- *Quelle est la probabilité*
  - *Pour qu'il soit inscrit à l'activité "Jeux" (J)*
  - *Pour qu'il soit inscrit à l'activité "Initiation Jeunes" (I)*
  - *Pour qu'il soit inscrit à l'activité "Création multimédia" (M)*
  - *Qu'il ne fasse aucune de ces activités*
  - *de* $J \cup M$
  - *de* $J \cap M$
- *On tire au hasard un adhérent inscrit à l'activité Jeux. Quelle est la probabilité qu'il soit inscrit à l'activité "Création Multimédia"*

Corrigé exercice 8

- $P(J) = 260/500 = 0,52$
- $P(I) = 140/500 = 0,28$
- $P(M) = 80/500 = 0,16$
- $P(N) = 40/500 = 0,08$

- $P(J \cup M) = 1 - P(N) - P(I) = 1 - 0,008 - 0,28$
- $= 64\ \%$

- $P(J \cap M) = P(J) + P(M) - P(J \cup M)$
- $= 0,04$
- $=20/500$

- $P(M/J) = 20/260 = 1/13$
- $P(M/J) = P(J \cap M)/P(J) = 0,04/0,52$

Exercice 9 (Binomiale et approx)

- *Une compagnie aérienne étudie les moyens d'améliorer sa rentabilité. Une étude sur une destination donnée démontre qu'en moyenne 6% des voyageurs ne se présentent pas à l'embarquement pour un vol.*
- *Par hypothèse on considère que toutes les n places du vol considéré sont réservées.*
- *Quelle est la loi de probabilité que suit la variable aléatoire X "nombre de voyageurs absents".*
- *Pour un avion d'une capacité de 190 places, combien cela fait-il en moyenne de places disponibles ?*
- *Par quelle autre loi peut on approximer la loi que suit la variable aléatoire X ? Justifier.*
- *Si la compagnie décide de vendre 10 places de plus que la capacité théorique (overbooking) quelle sera la probabilité qu'il se présente plus de voyageurs que de places disponibles lors de l'embarquement*
- *Conformément à la loi, la Cie envisage un dédommagement d'une valeur de C € pour les voyageurs qui ne pourraient embarquer sur le vol pour lequel ils sont théoriquement OK. Présenter un tableau qui donne pour chaque valeur de X le montant du dédommagement et sa probabilité.*

Corrigé exercice 9

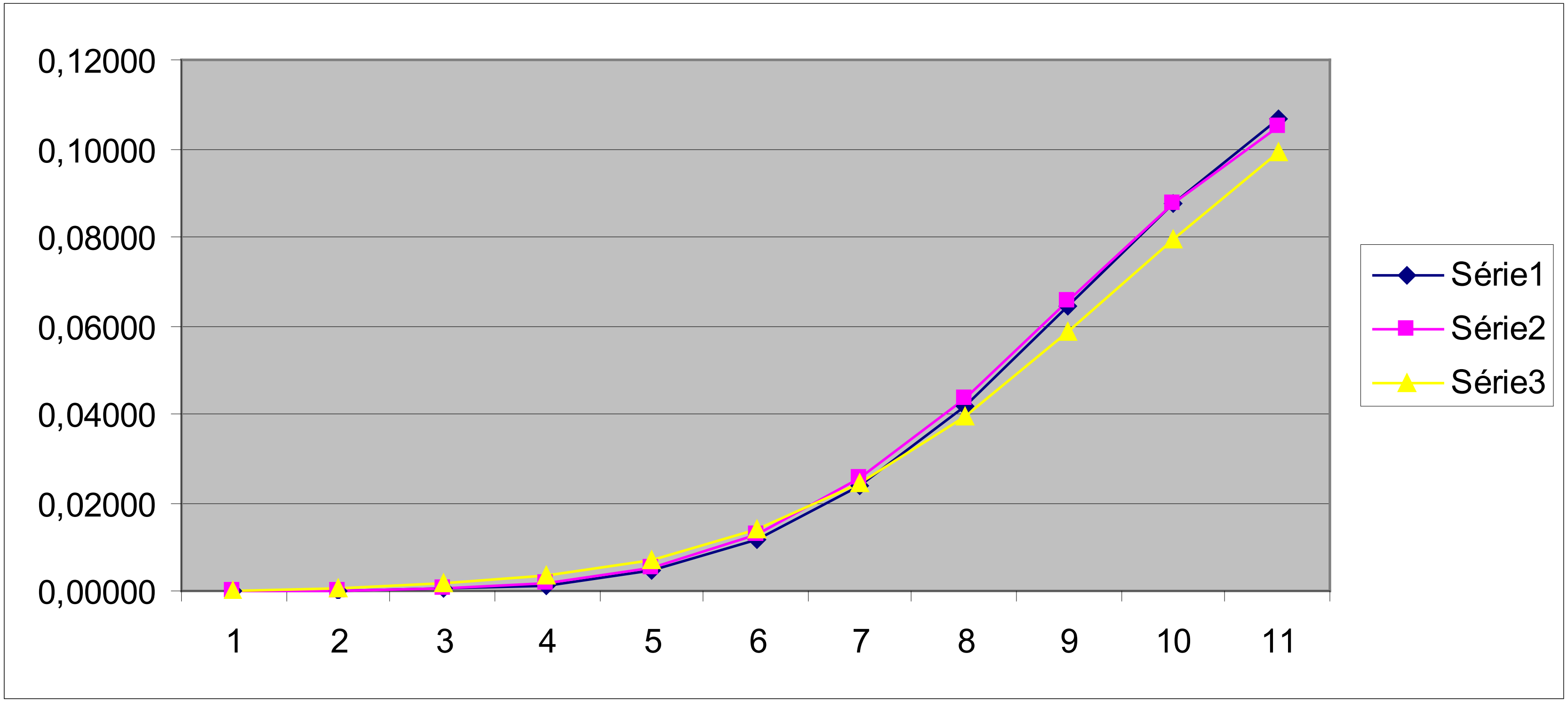
- Loi de X = loi binomiale
- de paramètre n
- de paramètre p = 0,06 et q = 0,94
- $P(X=k) = C_n^k\ 0{,}06^{\ k}\ 0{,}94^{\ n-k}$
- Pour un avion de 190 places
- La moyenne de X est l'espérance mathématique np = 190*0,06
- E(X) = 11,4 Soit 11/12 sièges non occupés sur ce vol
- La loi binomiale peut être approximée par Poisson dans les conditions suivantes :
- p petit, inférieur à 0,1
- n suffisant, en pratique > 30
- np<15
- Les conditions sont respectées (p=0,06 - n = 190 -
np = 11,4)
- Notons que npq > 9 (10,7) implique aussi le début de l'égibilité de l'approximation de Gauss. Un graphique comparera les 3 calculs dans les pages suivantes.

Corrigé exercice 9

- Approximation Loi de Poisson de paramètre m = 11,4
- Probabilité plus de voyageurs que de places disponibles
- 200 places sont vendues pour un avion qui ne dispose que de 190 sièges
- Le cas d'overbooking se déclenche selon la probabilité d'avoir X<10, soit X>= 9
- La loi a changé puisque son paramètre devient m= 200*0,06 = 12
- La table donne P(k>=9 - P cumulée pour 9) = 0,2424
- Il y a donc 24,24% de chances qu'au moins un passager ne puisse trouver un siège sur ce vol.
- Lorsqu'un voyageur est privé de son siège, le coût pour la Cie est C euros. Si n passagers sont dans ce cas, le coût est nC

Corrigé exercice 9

- Comparatif solutions Binomiale -bleu-, Poisson -Violet-, Gauss-jaune- (voir modèle EXcel)



Corrigé exercice 9

- Le tableau des coûts demandé

X	Coût	Probabilité
9	C	0,0874
8	2C	0,0655
7	3C	0,0437
6	4C	0,0255
5	5C	0,0127
4	6C	0,0053
3	7C	0,0018
2	8C	0,0004
1	9C	0,0001
0	10C	0,0000

- Le calcul de l'espérance mathématique se ferait par un calcul matriciel [cout].[proba] = [Esperance]

Corrigé exercice 9

CRemb 100

9	0,0874
8	0,0655
7	0,0437
6	0,0255
5	0,0127
4	0,0053
3	0,0018
2	0,0004
1	0,0001
0	0,0000

100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	**56,35882355**

Exercice 10 (Analyse fréquences et Gauss)

- *Le responsable d'un centre de traitement informatique veut étudier la durée de vie des disques durs de son parc d'ordinateurs. Pour ce faire, il a extrait de ses archives un échantillon de 32 pannes et déterminé la durée de vie des disques durs remplacés*
- *Complétez le tableau*

Durée de vie xi	Extrémité de classe	Nbre de disques ni	Effectifs cumulés	Fréquences cumulées Fi pour les extrémité de classes	Valeur de ti (variable normale centrée réduite) pour Fi
Moins de 1 an		2			
De 1 an à moins de 18 mois		3			
De 18 mois à moins de 2 ans		6			
De 2 ans à moins de 2,5 ans		8			
De 2,5 ans à moins de 3 ans		6			
De 3 ans à moins de 4 ans		4			
De 4 ans à moins de 5 ans		3			
Total		32			

Exercice 10

- *Construire un graphique avec en abcisse les extrémités de classe, et en ordonnées les valeurs ti de la variable centrée réduite obtenus en 1)*
- *Relier les points obtenus.*
- *Si on accepte l'hypothèse selon laquelle les durées de vie des disques durs remplacés suivent une loi de Laplace-gauss, en déduire une estimation graphique de la moyenne m et de l'écart-type σ de cette loi.*
- *On rappelle que si la distribution des durées de vie observées est bien normale, on doit avoir entre les valeurs xi et les valeurs de ti correspondantes, la relation linéaire:*

- *où m et σ représentent respectivement la moyenne arithmétique et l'écart type de la loi normale suivie par x.*

Exercice 10

- *Chaque fois qu'un disque dur est remplacé hors garantie, il en coûte 150 Euros à l'entreprise (coût du disque). Un prestataire propose un complément à la garantie du constructeur qui est limitée à la première année.*
  - *Complément de garantie pour la deuxième année : 30 euros*
  - *Complément de garantie pour la deuxième et la troisième année : 80 euros*
- *Ces propositions sont-elles avantageuses pour l'entreprise ?*
- *Quel est le meilleur choix ?*
- *On admettra que la durée de vie des disques durs suit une loi normale de moyenne 2 ans et demi et d'écart-type 1 an et qu'en cas de panne dans une période couverte par une garantie un disque neuf est fourni en remplacement.*

Exercice No 11 (Poisson et X^2)

- *Dans un magasin, afin de déterminer le nombre de vendeurs nécessaires pour assurer le service de clientèle dans des conditions satisfaisantes, on a procédé à une observation statistique sur les temps qui s'écoulent entre l'arrivée de 2 clients successifs*
- *Sur une demi-journée, on a obtenu les résultats suivants exprimés en centièmes d'heures*

Temps T qui s 'écoule entre deux arrivées (en centièmes d'heures)	0-1	1-3	3-5	5-8	8-20
Nombre de cas observés	**28**	**30**	**23**	**9**	**10**

Exercice No 11

- *Calculer une valeur approchée du temps moyen qui sépare l’arrivée de 2 clients successifs*
- *Calculer l’écart-type correspondant*

Corrigé exercice No 11

Temps T qui s 'écoule entre deux arrivées (en centièmes d'heures)	0-1	1-3	3-5	5-8	8-20		
Centre de classe	0,5	2	4	6,5	14		
Nombre de cas observés fi	28	30	23	9	10	100	
fi*T	14	60	92	58,5	140	364,5	
						3,645	Moy
Xi - moy	-3,145	-1,645	0,355	2,855	10,355		
Carré de Xi - moy2	9,891025	2,706025	0,126025	8,151025	107,226025		
	276,9487	81,18075	2,898575	73,359225	1072,26025	1506,6475	
						15,066	Variance
						3,8816	Ecart TYpe

Exercice No 11

- *Les hypothèses faites sur le phénomène « arrivées des clients » conduisent à affirmer que la variable aléatoire T suit une exponentielle de fonction de répartition*
- *$F(t) = P(T<t) = 1 - e^{-\lambda t}$ (t en centièmes d'heures)*
- *Justifier la valeur 0,274 qui pourrait être attribuée au coefficient λ.*

Corrigé exercice No 11

- La loi de Poisson peut être la résultante d'un Processus de Poisson
- Un processus de Poisson correspond à à la réalisation d'évènements aléatoires dans le temps : arrivée bateaux, trains, avions à destination, appels téléphoniques, clients au guichet, pannes machines
- Le processus de Poisson répond aux hypothèses suivantes :
  - Probabilité de réalisation d'un événement au cours d'une petite période infinitésimale de temps dt est proportionnelle à cette durée de temps dt. Elle tend donc vers 0 si dt tend vers 0
  - Evènements indépendants entre eux et indépendants du temps

Corrigé exercice No 12

- On peut démontrer que, si le nombre de réalisations d'un évènement dans une unité de temps suit une distribution de Poisson de paramètre m, alors le temps entre deux réalisations successives de l'évènement se distribue selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/m$
- L'intensité du processus de Poisson est défini par λ, paramètre de la loi exponentielle
- On choisit donc comme valeur de λ l'inverse de la moyenne, soit $1/3{,}645 = 0{,}274$

Exercice No 12

- *Pour toute la suite, on supposera λ = 0,3, valeur approchée de la précédente*
- *Déterminer les valeurs de F(t) pour les bornes des classes du tableau précédent (e-0,3 = 0,74082). En déduire les effectifs théoriques des différentes classes.*

Temps T qui s 'écoule entre deux arrivées (en centièmes d'heures)	0-1	1-3	3-5	5-8	8-20
Nombre de cas observés	**28**	**30**	**23**	**9**	**10**

Exercice No 12

- *Pour toute la suite, on supposera λ = 0,3, valeur approchée de la précédente*
- *Déterminer les valeurs de F(t) pour les bornes des classes du tableau précédent (e-0,3 = 0,74082). En déduire les effectifs théoriques des différentes classes.*

lambda	0,3
1	0,25918
3	0,59343
5	0,77687
8	0,90928
20	0,99752
1E+14	1

Corrigé exercice No 12

lambda	0,3				
			Proba théorique	Effectif théorique	Effectif empirique
1	0,25918	Int 0-1	0,25918	25,92	28,00
3	0,59343	Int 1-3	0,33425	33,42	30,00
5	0,77687	Int 3-5	0,18344	18,34	23,00
8	0,90928	Int 5-8	0,13241	13,24	9,00
20	0,99752	Int 8-20	0,08824	8,82	10,00
1E+14	1	Int 20+	0,00248	0,25	

Exercice No 12

- *Déterminer à l'aide d'un test du $\chi 2$ au seuil de 5% la validité de l'ajustement ainsi réalisé*

Corrigé exercice No 12

- Principe du test
- Les écarts entre la distribution observée et la distribution ajustée à la loi peuvent être de deux causes :
  - Une fluctation normale d'échantillonnage (l'échantillon est un extrait de la population) avec des écarts faibles
  - L'ajustement n'a pas lieu d'être, avec un écart supérieur avec des écarts élevés
- Cet écart va être mesuré par la **distance** existante entre la théorique ajustée et la distribution observée
- Cette distance étant une grandeur aléatoire, elle est mesurée par une loi de probabilité

Corrigé exercice No 12

- Cette loi permet de calculer la probabilité d'obtenir une distance supérieure à la distance observée
- On se fixe un seuil de probabilité α dit **seuil de confiance**
- Si la probabilité obtenue est inférieure au seuil de confiance, on rejette l'hypothèse.
- Si la probabilité obtenue est supérieure au seuil de confiance, on accepte l'hypothèse.

Corrigé exercice No 12

Effectif théorique	Effectif empirique	ecart	carré écart	carré écart/Npi
25,91817793	28	-2,081822068	4,333983124	0,167217894
33,42485609	30	3,424856094	11,72963927	0,350925647
18,34394996	23	-4,656050041	21,67880198	1,181795744
13,24122069	9	4,241220686	17,98795291	1,358481467
9,071795329	10	-0,928204671	0,861563911	0,09497171
			D=	3,1533925

Corrigé exercice No 12

- Ho : le phénomène suit une loi exponentielle de paramètre 0,3
- Variable de décision : D
- D-> $\chi 2$ (υ = k-r-1)
- k = 5 classes après regroupement
- r = 1 paramètre de la loi exponentielle
- 3 degrés de liberté
- Seuil 5% =>H0 étant vrai P(H1)=0,05
- P(H0) = 0,95
- On lit dans table P(D<7,81) =0,95
- Donc D limite 7,81 à comparer avec 3,15
- Hypothèse acceptée

Exercice No 13 (test hypothèse)

- *Une machine automatique remplit des paquets de café.*
- *Le poids affiché des paquets vendus est de 250 g.*
- *On considère que le poids du café mis par la machine dans un paquet est une variable aléatoire normale d'écart-type 5 g.*
- *La moyenne m peut être fixée librement par le conditionneur.*
- *Si la moyenne est 250 g, quelle est la probabilité d'avoir un paquet :*
  - *de plus de 258 g ?*
  - *de moins de 240 g ?*

Corrigé exercice No 13

- X : poids du café dans un paquet
- X _> Loi $\mathscr{N}(250,5)$

$$p(x > 258) = p(\frac{X-250}{5} > \frac{258-250}{5}) = P(T > 1{,}6) = 0{,}0548$$

$$p(x < 240) = p(\frac{X-250}{5} < \frac{240-250}{5}) = P(T < -2) = 1 - p(T \leq 2)$$

$$= 0{,}0228$$

Exercice No 13

- *Comment faut-il choisir m pour qu'en moyenne un paquet sur 100 au plus contienne moins de 250 g*
- *Pour éviter les réclamations des consommateurs, le conditionneur envisage d'abaisser de 1 sur 100 à 1 sur 1000, en moyenne, la proportion de paquets de moins de 250 g*
- *Quel serait le coût d'une telle mesure s'il vend annuellement 5 000 000 de paquets venant de cette machine et si le café lui revient à 0,69 Euro les 250 g*
- *Comparer ce coût à celui d'une offre de remboursement qui coûterait 0,91 € par paquet si le seuil 1 pour 100 est gardé*

Exercice No 13

- On veut m tel que

$$p(x \leq 250) = 0{,}01$$

$$p\left(\frac{X - m}{5} < \frac{250 - m}{5}\right) = 0{,}01$$

$$p(T < t) = 0{,}01$$

$$p(T < -t) = 0{,}99$$

$$table \Rightarrow -t = 2{,}33 \Leftrightarrow t = -2{,}33$$

$$\Rightarrow \frac{250 - m}{5} = -2{,}33 \Leftrightarrow m = 261{,}65g$$

Exercice No 13

- On veut m tel que

$$p(x \leq 250) = 0{,}001$$

$$p(\frac{X - m}{5} < \frac{250 - m}{5}) = 0{,}001$$

$$p(T < t) = 0{,}001$$

$$p(T < -t) = 0{,}999$$

$$table \Rightarrow -t = 3{,}1 \Leftrightarrow t = -3{,}1$$

$$\Rightarrow \frac{250 - m}{5} = -3{,}1 \Leftrightarrow m = 265{,}5g$$

Exercice No 13

- Cette mesure entraîne une augmentation de poids du paquet moyen de 265,5-261,65=3,85g
- Et donc un coût de
- 5 000 000 * 3,85 * 0,69 / 250 = 53136 €
- Coût pour le remboursement d'un paquet sur 100 à 0,91 €
- 5 000 000*0,91/100 =45 500
- Il est préférable de ne pas abaisser à 1 pour mille la proportion de paquets de moins de 250 g

Exercice No 13

- *Le conditionneur s'est fixé une moyenne de 256 g par paquet.*
- *Le conditionneur règle sa machine pour que le poids moyen du paquet soit de 256 g. Il veut contrôler ce réglage par un jugement sur des échantillons de 50 paquets.*
- *On prend comme hypothèse nulle "la machine est bien réglée". On veut tester cette hypothèse contre l'alternative "la machine est mal réglée", c'est à dire que le poids moyen du paquet est différent de 256 g. Le test est fait au seuil de 5%. Décrire la procédure de test que l'on peut utiliser. Décrire la procédure quand le seuil est de 10%.*
- *Un contrôle sur 50 paquets a donné comme moyenne 254,7 g. Au seuil de confiance de 5%, peut-on conclure que la machine est bien réglée ? Et au seuil de 10% ?*

Exercice No 13

- Soit l'hypothèse
- H0 Machine bien réglée : m=256
- H1 Machine pas bien réglée m non = 256
- Variable de décision X

- Sous H0 : Moy X est une loi normale
  - d'espérance E(X)=m = 256
  - d'écart type σ = σ/Vn=5/V50
- Région critique au seuil de 5%
- Si Ho vraie p(choisir H1)= 0,05
- Si Ho vraie p(choisir H0)= 0,95

Exercice No 13

- Si Ho vraie p(l1<moy(X)<l2)= 0,95
- Si H0 vrai

$$p\left(\frac{l1-256}{5/\sqrt{50}}<\frac{moy(X)-256}{5/\sqrt{50}}<\frac{l2-256}{5/\sqrt{50}}\right)=0,95$$

- Si H0 vrai, p(-t<T<t)=0,95
- Si H0 vrai p(T<t)=0,975
- On lit t=1,96

$$\frac{l1-256}{5/\sqrt{50}}=-1,96 \Rightarrow l1=254,61$$

$$\frac{l2-256}{5/\sqrt{50}}=1,96 \Rightarrow l2=257,39$$

Exercice No 13

- On mesure moy(X) dans un échantillon de taille 50
- Si 254,61<moy(x)<257,39 on valide H0 au seuil de 5%
- sinon on rejette H0
- Dans le cas où le seuil de signification est 10%
- Même procédures mais t tel que
- p(-t<T<t)=0,90
- p(T<t)=0,95
- t=1,645
- D'où l1=254,84 et l2 = 257,16
- Au seuil de 10% on valide H0 si 254,84<moy(x)<257,16

Exercice No 13

- moy(x)=254,7
- On valide au seuil de 5% la machine est bien réglée
- On valide au seuil de 105% la machine est mal réglée

Exercice No 14 (Probabilités conditionnelles)

- *Lorsqu'une substance polluante P est présente dans l'eau, une certaine réaction permet de la détecter.*
- *Lorsque la réaction est celle qui survient en présence de P, on dit alors que la réaction est positive.*
- *La probabilité d'avoir une réaction positive en l'absence de P est de 0,003.*
- *La probabilité d'avoir une réaction négative en l'absence de P est de 0,297*
- *La probabilité d'avoir une réaction positive est de 0,528*
- *Q1 Si on prend un prélèvement au hasard, quelle est la probabilité que la réaction soit négative et que le prélèvement soit pollué.*
- *Q2 On prend un prélèvement au hasard. Il est pollué. Quelle est la probabilité pour que la réaction soit négative ?*
- *Q3 On prend un prélèvement au hasard. Il n'est pas pollué. Quelle est la probabilité pour que la réaction soit positive.*

Corrigé exercice No 14

- Les éléments fournis

	Pollué	Non pollué	Somme
Positif		0,003	0,528
Négatif		0,297	
Somme			

- Les éléments que l'on peut recalculer

	Pollué	Non pollué	Somme
Positif	0,525	0,003	0,528
Négatif	0,175	0,297	0,472
Somme	0,7	0,3	1

Corrigé exercice No 14

- Q1 La probabilité que la réaction soit négative et que le prélèvement soit pollué : 0,175

- Q2

  A : le prélèvement est pollué

  Abarre : le prélèvement n'est pas pollué

  B : la réaction est positive

  Bbarre : la réaction est négative

  P(A/Bbarre) = P(A $\cap$ Bbarre) / P(Bbarre)

  = 0,175/0,472

  = 0,37

  P(A/Bbarre) = 0,37

Corrigé exercice No 14

- Q3
- A : le prélèvement est pollué
- Abarre : le prélèvement n'est pas pollué

- B : la réaction est positive
- Bbarre : la réaction est négative

- P(Abarre/B) = P(Abarre $\cap$ B) / P(B)

- = 0,003/0,528

- = 0,0057

- P(A/Bbarre) = 0,0057

Exercice No 15 (Bases Poisson)

- *Dans le réseau Internet, un routeur (dispositif assurant le cheminement des messages) voit arriver un flot de trames (messages élémentaires) dans l'intervalle [0,t].*
- *On considère que l'arrivée de ces trames puisse être modélisé par un processus de Poisson avec un taux 0,3t.*
- *Calculer la probabilité des évènements suivants :*
- *Q1 Pour que trois trames exactement arrivent dans l'intervalle [0,10]*
- *Q2 Pour qu'au moins cinq trames arrivent dans l'intervalle [0,20]*
- *Q3 Pour que le nombre de trames dans l'intervalle [0,5] soit compris entre 3 et 7 inclus.*

Corrigé exercice No 15

Puisque c'est un processus de Poisson, le nombre X d'évènements enregistrés au cours d'un intervalle de durée t est une variable aléatoire de Poisson de paramètre m = c t

La probabilité pour que trois trames arrivent dans l'intervalle [0,10]

$x = 3 \quad t = 10 \quad m = 0{,}3*10 = 3$

$$P(X = 3) = \frac{(3)^3 e^{-3}}{3\,!}$$

$P(X) = 0{,}224$

Corrigé exercice No 15

La probabilité pour qu'au moins 5 trames arrivent dans l'intervalle [0,20]

x<=5 t = 20 m = 0,3*20 = 6

$$P(X >= 5) = 1 - \sum_{i=0}^{4} \frac{(6)^i e^{-6}}{i!}$$

P(X>=5) = 1 - 0,285

P(X>=5) = 0,715

Corrigé exercice No 15

La probabilité pour que le nombre de trames dans l'intervalle [0,5] soit compris entre 3 et 7 (inclus).

x<=3 et x>=7   t = 5 m = 0,3*5 = 1,5

$$P(x \leq 3 \cap x \geq 7) = \sum_{i=3}^{7} \frac{(1,5)^i e^{-1,5}}{i!}$$

P(x<=3 et x>=7)   =   0,19

Corrigé exercice No 15

m	3				
3	**0,224**		Loi Poisson m=3		
m	6				
4	0,2851	**0,7149**	Loi Poisson m=6		
	1,5				
3	0,1255		Loi Poisson m=1,5		
4	0,0471				
5	0,0141				
6	0,0035				
7	0,0008				
Somme	**0,191**				

Exercice No 16 (Approx. binomiale par Normale)

- *ProtecWare a installé un système de détection d'intrusion sur le campus d'une université. Les dispositifs sont très sensibles et, au cours d'un week-end, chacun a 10% de chances de se déclencher intempestivement sans qu'un intrus soit effectivement présent.*
- *Ces activations inopportunes sont indépendantes les unes des autres. On considère qu'aucun intrus ne va tenter de pénétrer sur le campus le prochain week-end.*
- *Q1 Il y a 6 équipements dans le bâtiment administratif. Quelle est la probabilité pour qu'aucun équipement ne se déclenche ?*
- *Q2 Si 2 ou plus des équipements se déclenchent au cours du même week-end, le système prévient automatiquement la police. Quelle est la probabilité pour qu'une telle alerte soit effectivement lancée ?*
- *Q3 Combien de dispositifs risquent de se déclencher et quel est l'écart-type associé ?*
- *Q4 Il y a un total de 200 équipements sur le campus. Quelle est la probabilité pour qu'au moins 22 de ces équipements se déclenchent (Choisissez une approximation de la loi de 1. par une autre loi et justifiez votre choix)*
-

Corrigé exercice No 16

- **Q1** Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre d'équipements qui se déclenchent intempestivement.
- X suit la loi binomiale puisqu'il existe deux éventualités (l'alarme se déclenche ou ne se déclenche pas) dont les probabilités restent constantes au cours d'une suite d'épreuves indépendantes.

- $P(X = k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k}$

- $n = 6$
- $k = 0$
- $p = 0,1$
- $q = 0,9$

- $P(X = 0) = 0,5314$

Corrigé exercice No 16

- **Q2**
- P(X>=2) = 1 - ((P(X=0) + (P(X=1)) = 1 - (0,5314 + 0,3543)) = 0,1143
- P(X>=2) = 0,1143
- **Q3**
- Le nombre recherché est défini par l'espérance mathématique de la variable aléatoire binomiale considérée.
- E(X) = np = 6 * 0,1 = 0,6
  - Nbre dispos déclenchés = 0,6
- L'écart type de la variable aléatoire binomiale considérée
- $\sigma(X) = \sqrt{npq}$
- $= 0{,}7348$

Corrigé exercice No 16

- n = 200
- p = 0,1
- q = 0,9

- n>30 p<=0,1 => approx possible
- npq = 18 > 9 => Conditions d'application de la loi normale

- B(n,p) est approchée par N (np, V npq)

- m = np = 20
- σ = V npq = 4,243

- P(X>=22) = 1 - P(X<22)

- Changement de variable : t = (x - m) / σ

- t = (22-20)/4,2426

- t = 0,4714

- La table donne P(X<22) = 0,6808

- P(X>=22) = 0,3192

Exercice No 17 (Test d'hypothèse)

- ***Le bruit émis par les avions doit être inférieur à 80 décibels dans les zones voisines, sinon l'aéroport doit indemniser les riverains***
- ***Ceux-ci affirment que le niveau de bruit atteint effectivement 80 décibels alors que l'aéroport affirme qu'il n'est que de 78 décibels.***
- ***Des experts font des mesures en prélevant un échantillon de n= 100 et s2 = 49***
- ***1: Que signifie le choix H0 m = 80 et H1 : m<80***
- ***2. H0 m=80***
  - ***Quelle région critique ?***
  - ***Que faire si moyenne de l'échantillon est 79,1***

Corrigé exercice No 17

- **Définition hypothèse**
- **Ho : m=80 (point de vue riverains)**
- **H1 : m<80 (point de vue aéroport)**
- **On privilégie H0, le point de vue des riverains**

- **Variable de décision** $\overline{X}$ **définie par loi normale N(m,σ)**
- **Sous Ho ,** $\overline{X}$ **=>** $E(\overline{X})$

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- **Espérance estimée par m (moyenne) = 80**
- **Ecart type estimé par**

$$\frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{7}{\sqrt{99}}$$

Corrigé exercice No 17

- **Détermination région critique (schéma page suivante)**
- **Sous Ho P(choisir H1 / Ho vraie) = 0,05 = α**
- **Sous Ho** $P(\overline{X} < l) = 0,05$

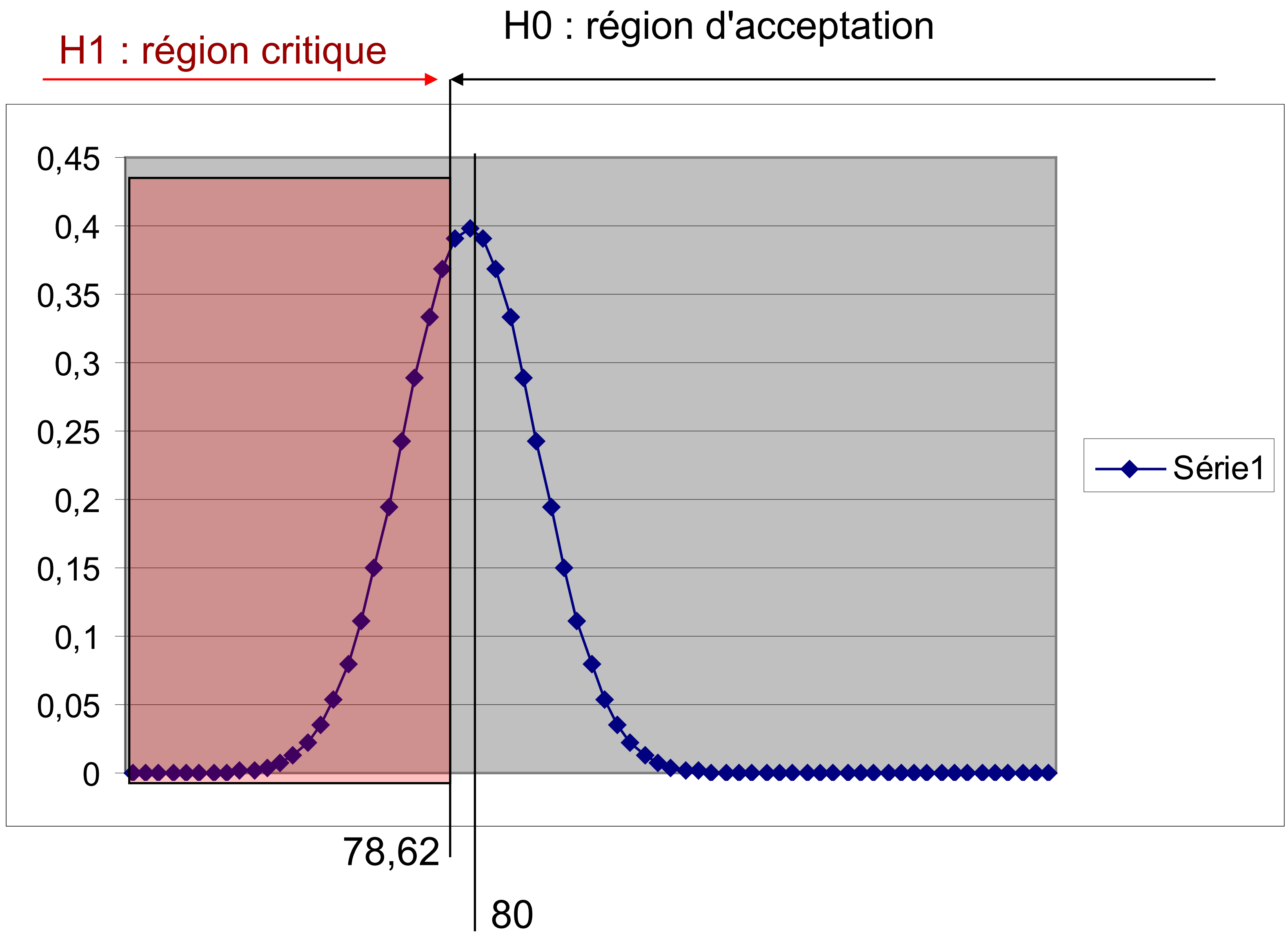
Sous Ho

$$P\left(\frac{\overline{X} - 80}{\frac{7}{\sqrt{99}}} < \frac{l - 80}{\frac{7}{\sqrt{99}}}\right) = 0,05$$

Sous Ho P(T<t)=0,05 => t=-1,645

$$\Rightarrow \frac{l - 80}{\frac{7}{\sqrt{99}}}) = -1,645 \Leftrightarrow l = 78,84$$

Corrigé exercice No 17



Corrigé exercice No 17

- **Enoncé de la règle de décision**
- **On mesure $\overline{X}$, bruit moyen dans un échantillon de taille 100**
- **Si** $\overline{X} < 78.84db$ **On rejette Ho Pas d'indemnisation**
- **Si** $\overline{X} > 78.84db$ **On valide Ho Indemnisation**

- **On mesure 79,1 db. On valide Ho. Les riverains demandent indemnisation.**

Exercice No 18 (Probabilités, classes)

- *Vous êtes le directeur de la société Cit(y)Com, qui produit des séries TV.*
- *1. Les salaires de vos employés se répartissent uniformément dans une tranche qui va de 10 000 € à 40 000 € par an.*
- *Vous choisissez au hasard un de ces employés. Quelle est la probabilité pour que son salaire se situe entre 14 000 et 20 000 €.*

Corrigé exercice No 18

- Considérons des classes de 1000 €.
- Les salaires se répartissent selon 30 classes de 10 000 à 40 000.
- La tranche 14 000 à 20 000 couvre 6 classes.
- La probabilité est donc de 6/30 soit 20%.
- $P(14\,000 < X <= 20000) = 0,2$

Exercice No 18 (Loi normale)

- *2. Vous soumettez tous vos employés à un test de personnalité pour lequel le score a une moyenne de 100 avec un écart type de 10.*
- *Quel pourcentage de votre effectif obtiendra un score compris entre 75 et 80 ?*

Corrigé exercice No 18

- La variable centré réduite pour un score de 75 = 75-100/10 = -2,5
- La variable centré réduite pour un score de 80 = 80-100/10 = -2,0
- Le tableau donne les probabilités
- Pour t = -2,5 : $\Pi(-t)$ = 0,9938 $\Pi(t)$ = 0,0062
- Pour t = -2,0 : $\Pi(-t)$ = 0,9772 $\Pi(t)$ = 0,0228
- Le pourcentage de votre effectif qui obtiendra un score compris entre 75 et 80 :
- 0,9938 – 0,9772 = 0,166
- P(75 < score <= 80) = 0,16

Exercice No 18 (Loi de Poisson)

- *3. Votre nouvelle série « Voisin de palier» est un cuisant échec, ce qu'il est convenu d'appeler un » flop » dans la profession.*
- *L'audience décline régulièrement de 30% par mois.*
- *Choisissez une fonction de densité adéquate qui vous permette d'évaluer la probabilité pour qu'un téléspectateur choisi au hasard soit perdu pour vous dans les trois prochains mois.*

Corrigé exercice No 18

- L'audimat mesure le départ d'un flot de téléspectateurs dans l'intervalle [0,t] exprimé en mois.
- P représente l'effectif de l'ensemble E des téléspectateurs (un grand nombre au départ) qui regarde l'émission. A l'image d'un péage qui voit arriver des autos, l'ensemble E' constitué par les autres chaînes voit arriver chaque mois 30% (0,3) de E.
- On peut donc modéliser l'arrivée des téléspectateurs dans E' par un processus de Poisson.
- En fonction de cette hypothèse, le nombre X d'arrivées enregistrées au cours d'un intervalle de durée t est une variable aléatoire de Poisson de paramètre m = c t, soit 0,3t.

Corrigé exercice No 18

- **Ce qui nous intéresse n'est pas de déterminer la probabilité d'arrivée de 1, 2 ou 3 téléspectateurs dans E' dans les trois mois, mais celle qu'un téléspectateur pris au hasard dans E parte dans cet intervalle.**
- **Cette probabilité en fait la probabilité complémentaire à celle qu'aucun téléspectateur ne parte au cours de ces trois mois, c.a.d. celle qu'il n'y ait aucun téléspectateur n'arrivant dans E'.**
- **La probabilité pour qu'aucun téléspectateur n'arrive dans l'intervalle [0,3] est régie par la loi de Poisson que nous avons identifiée.**
- **x = 0 t = 3 m = 0,3*3 = 0,9**
- **Le calcul donne P{X=0}= 0,40656966**
- **La probabilité inverse, celle que nous recherchons, est donc : 1 - 0,40656966 = 0,59343034**
- **On peut aussi utiliser les tables :**
- **P(1 téléspectateur pris au hasard parte dans les 3 mois) = 0,5934**

Exercice No 18 (Loi Normale)

- *4. Compte-tenu de l'échec de votre série, votre compagnie a fait l'objet d'une OPA lancée par votre concurrent BigCashPerView.*
- *La fusion est en cours et un « benchmark » laisse apparaître que les coûts de revient de vos minutes d'émission sont distribués selon une loi normale autour d'une moyenne de 29 870 € avec un écart type de 2 650 €.*
- *Le standard de la minute d'émission chez BigCashPerView est de 28 000 €.*
- *Estimez le pourcentage de vos émissions dont les coûts de tournage excèdent le nouveau standard.*

Corrigé exercice No 18

- **Estimez le pourcentage d'émissions dont les coûts de tournage excèdent le nouveau standard.**
- **Effectuons le changement de variable**
- **X = 28000-29870**
- **= -0,70566038**
- **Le tableau donne les probabilités**
- **Pour t = -0,71 : $\Pi(-t) = 0,76$ $\Pi(t) = 0,24$**
- **76 % des émissions de votre chaîne dépassent le nouveau standard**
- **24 % sont en deçà**

Exercice No 19 (Loi normale)

- **Un constructeur a besoin, pour équiper ses vélos, de tubes en aluminium.**
- **Tout tube dont le diamètre n'est pas compris entre 25,9 mm et 26,1 mm (ces deux valeurs limites sont incluses dans le domaine rejeté) est considéré comme défectueux.**
- **Son fournisseur lui propose des lots de tubes dont le diamètre a pour moyenne 26 mm et pour écart-type 0,04 mm.**
- **1. Calculez la probabilité pour qu'un tube pris au hasard dans un tel lot soit défectueux si l'on suppose que le diamètre des tubes est une variable aléatoire normale.**

Corrigé exercice No 19

- **Probabilité pour que le tube soit de diamètre inférieur ou égal à 25,9 :**
- **0,006210**
- **Probabilité pour que le tube soit de diamètre supérieur ou égal à 26,10 :**
- **1 - 0,993790 = 0,006210**
- **Probabilité pour que le tube soit rejeté :**
- **2 * 0,006210 = 0,01242**

Exercice No 19 (Test du χ^2)

- ***On tire 100 fois avec un dé et on obtient le tableau de tirage suivant***

Résultat constaté	Effectif observé
1	14
2	17
3	20
4	13
5	19
6	17

- ***On se pose la question si ce dé n'est pas biaisé, c'est-à-dire si chacune des 6 faces a rigoureusement la même probabilité d'être observée lors d'un lancer.***
- ***Les conditions de l'expérience (Taille de l'échantillon assez grand - égal à 100- et effectif espéré dans chaque classe suffisamment grand -100/6-) permettent d'envisager l'utilisation du test d'ajustement du khi-deux ( ).***

Exercice No 19 (Test du χ^2)

- ***1. Quel est le nombre de degrés de liberté à considérer (la loi théorique considérée n'a pas de paramètre)***
- ***2. Construisez le tableau permettant le calcul de la variable de décision, c.a.d. la distance entre les effectifs observés et les effectifs espérés d'un tirage non biaisé.***
- ***3. Compte-tenu de la valeur de cette distance, en considérant un risque de première espèce de 5%, quel est votre verdict concernant le dé.***

Corrigé exercice No 19

- **Q1. Le nombre de degrés de liberté : 6 – 1 = 5**
- **Q2. Le tableau permettant le calcul de la distance, c.a.d. d'estimer l'ajustement de la distribution constatée à la distribution théorique définie par une probabilité de 1/6 pour chaque face :**

Classe	Effectif observé (ni)	Probabilité théorique	Effectif théorique (vi)	(ni-vi)²/vi	Distance
1	14	0,16667	16,66667	0,42667	
2	17	0,16667	16,66667	0,00667	
3	20	0,16667	16,66667	0,66667	
4	13	0,16667	16,66667	0,80667	
5	19	0,16667	16,66667	0,32667	
6	17	0,16667	16,66667	0,00667	
Total	100	1,00000	100,00000	2,24000	2,24000

- **Q3 : Verdict**
- **Tester l'hypothèse avec un risque de 5% implique, pour 5 degrés de liberté, une borne de 11,07, largement supérieure à la distance calculée de 2,24**
- **Les résultats observés conduisent à accepter le dé comme non biaisé.**

Exercice No 20 (Probabilités composées)

- ***Une étude épidémiologique a été menée par un institut médical sur la présence d'un facteur génétique S parmi les patients d'une population B.***
- ***Il est démontré dans cette étude que dans cette catégorie B, 40% des patients ont le facteur S.***
- ***Un échantillon de deux de ces usagers est choisi.***
- ***1. Quelle est la probabilité pour qu'aucun de ces patients n'ait le facteur S ?***

Corrigé de l'exercice No 20

- **Q1. Recherchons la probabilité pour qu'aucun des patients n'ait le facteur S.**
- **Les deux évènements « S1 : patient 1 avec facteur S » et « S2 : patient 2 avec facteur S » sont indépendants .**
- **$P(S1) = 0,4 \quad P(\overline{S1}) = 1 - 0,4 = 0,6$**
- **$P(\overline{S1} \cap \overline{S2}) = P(\overline{S1}) * P(\overline{S2})$ (Probabilités composées pour des évènements indépendants)**
- **Exprimons la variable aléatoire X, nombre de patients avec facteur S**
- **$P(X=0) = P(\overline{S1} \cap \overline{S2}) = P(\overline{S1}) * P(\overline{S2}) = 0.6 * 0,6$**
- **$P(X=0) = 0,36$**

Exercice No 20 (Probabilités composées)

- ***Une étude épidémiologique a été menée par un institut médical sur la présence d'un facteur génétique S parmi les patients d'une population B.***
- ***Il est démontré dans cette étude que dans cette catégorie B, 40% des patients ont le facteur S.***
- ***Un échantillon de deux de ces usagers est choisi.***

- ***2. Quelle est la probabilité pour qu'un seul de ces patients ait le facteur S ?***

Corrigé de l'exercice No 20

- **2. Quelle est la probabilité pour qu'un seul de ces patients ait le facteur S ?**

- **C'est la probabilité** $P(X=1) = P(\overline{S1} \cap S2) \cup P(S1 \cap \overline{S2})$
- $$P(X=1) = P(\overline{S1} * S2) + P(S1 * \overline{S2})$$
- **(Probabilités totales pour des évènements mutuellement exclusifs)**
- $P(X=1) = 0.4 * 0.6 + 0.4 * 0.6 = 0{,}48$
- $P(X=1) = 0{,}48$

Exercice No 20 (Probabilités composées)

- ***Une étude épidémiologique a été menée par un institut médical sur la présence d'un facteur génétique S parmi les patients d'une population B.***
- ***Il est démontré dans cette étude que dans cette catégorie B, 40% des patients ont le facteur S.***
- ***Un échantillon de deux de ces usagers est choisi.***

- ***3. Quelle est la probabilité pour que les deux patients aient le facteur S ?***

Corrigé de l'exercice No 20

- Q3. Recherchons la probabilité pour que les deux patients aient le facteur S.

- $P(X=2) = P(S1 \cap S2) = P(S1) * P(S2) = 0.4 * 0,4$

- **$P(X=2) = 0,16$**

Exercice No 20 (Loi binomiale)

- ***Une étude épidémiologique a été menée par un institut médical sur la présence d'un facteur génétique S parmi les patients d'une population B.***
- ***Il est démontré dans cette étude que dans cette catégorie B, 40% des patients ont le facteur S.***
- ***Un échantillon de deux de ces usagers est choisi.***

- ***4. Vérifiez que ces trois valeurs correspondent à celles fournies par une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.***

Exercice No 20 (Loi binomiale)

- **Soit une loi binomiale dont les paramètres sont :**
- **Nombre d'épreuves n = 2**
- **Probabilité p de « succès » = 0,4**
- **Probabilité q de « non succès » = 0,6**

La probabilité Pk d'obtenir k succès au cours de ces n épreuves :

$$P_k = C_n^k p^k q^{n-k}$$

- **P(X=0) =** $P_0 = C_2^0 * 0{,}4^0 * 0{,}6^{2-0}$ **= 1 * 1 * 0,36 = 0,36**
- **P(X=1) =** $P_1 = C_2^1 * 0{,}4^1 * 0{,}6^{2-1}$ **= 2 * 0,4 * 0,6 = 0,48**
- **P(X=2) =** $P_2 = C_2^2 * 0{,}4^2 * 0{,}6^{2-2}$ **= 1 * 0,16 * 1 = 0,16**

- **P(X=0) = 0,36**
- **P(X=1) = 0,48**
- **P(X=2) = 0,16**

Exercice No 20 (Loi binomiale)

- ***Une étude épidémiologique a été menée par un institut médical sur la présence d'un facteur génétique S parmi les patients d'une population B.***
- ***Il est démontré dans cette étude que dans cette catégorie B, 40% des patients ont le facteur S.***
- ***Un échantillon de deux de ces usagers est choisi.***

- ***5. Expliquez pourquoi ce phénomène est régi par la distribution de probabilité spécifiée***

Corrigé de l'exercice No 20

- **Le résultat est normal puisque le phénomène décrit est effectivement régi par une distribution binomiale.**
- **Notre étude épidémiologique est une suite de 2 épreuves de Bernouilli : le test de présence du facteur S du patient 1 et celui du patient 2.**
- **Ce test a deux issues possibles et seulement 2.**
- **Chaque épreuve est indépendante l'une de l'autre.**
- **Pour chaque épreuve :**
- **La probabilité p d'un test positif (« succès » au sens probabiliste)**
- **La probabilité q = 1-p d'un test négatif.**
- **Le phénomène décrit est régi par une distribution binomiale de paramètre n=2, p=0,4, q=0,6.**

Exercice No 21 (Binomiale et Poisson)

- ***Dans un audit des transactions effectuées par une société, on considère que la probabilité de trouver une erreur est de 0,2.***
- ***1. Dans une séquence de 30 audits indépendants, quelle est la probabilité de trouver une erreur ?***
- ***2. Dans cette même séquence, quelle est la probabilité de trouver au moins trois erreurs ?***
- ***3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable nombre d'erreurs***
- ***Lorsque le nombre d'audits est très large, il est possible de considérer qu'une distribution de Poisson d'espérance λ = 6.0 puisse être appliquée.***
- ***4. En fonction de cette hypothèse, recalculez les probabilités de la première partie et commentez.***

Corrigé de l'exercice No 21

- **Soit un audit avec une probabilité de détection d’erreur de 0,2**
- **Q1. On considère 30 audits indépendants. P(1 erreur) ?**
- **Nous avons donc une suite de 30 épreuves de Bernouilli. Chaque audit a deux issues possibles : Détection d’une erreur (probabilité 0,2) ou pas de détection d’erreur (probabilité 0,8).**
- **Le phénomène décrit est donc régi par une distribution binomiale avec les paramètres n=30, p=0,2, q=0,8.**
- **La probabilité de trouver une erreur :**
- **P(X=1) =** $P_1 = C_{30}^{1} * 0{,}2^{1} * 0{,}8^{30-1}$
- **= 30 * 0,2 * 0,00155 = 0,00928**
- **P(X=1) = 0,00928**

Corrigé de l'exercice No 21

- **Q2.**

- **La probabilité de trouver au moins trois erreurs**
- **= 1 –(P(0)+P(1)+P(2))**

- **P(X=0) =** $P_0 = C_{30}^{0} * 0{,}2^{0} * 0{,}8^{30-0}$
- **= 1 * 1 * 0,00124 = 0,00124**

- **P(X=2) =** $P_2 = C_{30}^{2} * 0{,}2^{2} * 0{,}8^{30-2}$
- **= 435 * 0,04 * 0,00193 = 0,03366**

- **P(X = au moins 3) 1 – (0,00928 + 0,00124 + 0,03366)**
- **P(X =au moins 3) = 0,95582**

Corrigé de l'exercice No 21

- Q3.
- L'espérance mathématique :

$$E\{X\} = \sum_{k=0}^{1} kP\{X = k\} = (0 * q) + (1 * p) = p$$

- E{X} = p = 0,2

- La variance :

$$V\{X\} = \sum_{k=0}^{1} (k - p)^2 P\{X = k\} = \left[\ (0 - p)^2 * q\ \right] + \left[\ (1 - p)^2 * p\ \right]$$

- $V\{X\} = p^2q + q^2p = pq(p+q) = pq$
- V{X} = pq = 0,16

Corrigé de l'exercice No 21

- Q4
- Nous considérons la loi de Poisson de paramètre 6 ($\lambda = np = 30 * 0,2$)
- Nous considérons les probabilités P(X=0), P(X=1) et P(X=2) dans la table.
- P(X=0) = 0,0025
- P(X=1) =0,0149
- P(X=2) =0,0446
- P(X=au moins 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) = 0,938
- Les probabilités demandées :

- **P(X=1) = 0,0149 (vs 0,00928)**
- **P(X =au moins 3) = 0,938 (vs 0,95582)**

Corrigé de l'exercice No 21

- L’approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson n’est valable qu’à 37% pour P(X=1).
- Elle est valable à 2% près pour P(X=au moins 3).
- Nous sommes donc aux limites de l’approximation, qui sera d’autant plus applicable que la probabilité est faible.
- Nous considérerons en pratique une limite d’application de l’approximation pour $p < 0{,}1$.

Exercice No 22 (Poisson)

- ***Le nombre d'articles réapprovisionnés dans un magasin au cours d'une semaine suit une distribution de Poisson avec m = 45.***
- ***Quelle doit être la taille du stock disponible pour que l'approvisionnement permette d'éviter la rupture avec une probabilité égale à 0,97.***

Corrigé de l'exercice No 22

- **Si le réapprovisionnement suit une distribution de Poisson de paramètre m=45, la probabilité cumulée d'avoir une quantité réapprovisionnée X inférieure à la valeur de la consommation limite CL est :**

$$P(X \leq ConsommationLimite) = \sum_{X=0}^{CL} \frac{e^{-45} * 45^{x}}{x!} = 0,97$$

- **Le stock de sécurité Ssec doit donc couvrir cette consommation limite CL. Il est donc la valeur pour laquelle la probabilité cumulée définie par la loi de réapprovisionnement atteint 97%.**
- **Le tableau de la loi de Poisson fourni en annexe donne une probabilité cumulée de 97% pour un stock de 58 articles.**
- **Notons que nous pouvons lire la table ainsi :**
- **Avec un stock de sécurité de 50, j'ai 20% (100-80) de chances de tomber en rupture de stock..**
- **Avec un stock de sécurité de 58, j'ai 3% (100-97) de chances de tomber en rupture de stock.**
- **Avec un stock de sécurité de 61, je n'ai plus que 1% (100-99) de chances de tomber en rupture de stock.**

Exercice No 23 : distribution d'échantillonnage

- *Un fabricant de fil synthétique de canne à pêche a déterminé après une longue période d'essai que la résistance à la rupture de son fil se distribue approximativement selon une loi normale de moyenne égale à 30kg et d'écart type égal à 4 kg.*
- *Il modifie son processus de fabrication pour gagner du temps.*
- *On prélève un échantillon de 25 pièces dans la production du nouveau processus et on mesure la moyenne de cet échantillon qui est égale à 30 kg.*
- *Quelle est la probabilité d'avoir une résistance moyenne à la rupture inférieure ou égale à 28 kg si le nouveau processus ne diminue pas la résistance à la rupture ?*

Corrigé de l'exercice No 23

- Soit X la résistance à la rupture d'un morceau de fil choisi au hasard et supposons que X soit une variable normale avec $M = 30$ et $\sigma = 4$.
- Suivant le théorème précédent, la moyenne de l'échantillon calculée sur un échantillon de taille n = 25 suit une loi normale de moyenne $m(\overline{x}) = 30$ et d'écart type $\sigma(\overline{x}) = 4 / (25)^{1/2} = 0,8$

- Il en résulte
- $P(X<=28) = P(Z <= -2,5)$ avec $Z = x - \overline{x} / \sigma(\overline{x})$
- Z est une variable normale, centrée, réduite. On détermine sa probabilité à partir de la table.
- P = 0,006

Exercice No 24 : estimateur d'une moyenne

- *La gestion de la qualité de service du RTC est fondée sur divers indicateurs comme l'indicateur TCOM : temps d'établissement des communications (délai exprimé en secondes de mise en relation entre deux abonnés)*
- *A l'image de la durée de communication de l'exercice précédent, on a pu déterminer que ce délai était une variable aléatoire régie par une loi normale*
- *Sur un échantillon de 300 communications, on observe une valeur moyenne de cet indicateur X = 15,5 secondes et un écart-type de 4 secondes.*

1. *Déterminer un intervalle de confiance de niveau 95% pour la valeur moyenne de TCOM*
2. *Quelle taille d'échantillon serait nécessaire pour estimer la moyenne m avec une précision de +/- 0,1 sec (pour le même niveau de confiance de 95% et un écart-type constant quelque soit la taille de l'échantillon)*

Corrigé de l'exercice No 24

- Variable estimateur moyenne $\overline{X}$
- $E(\overline{x}) = m$ ____ $\sigma(\overline{x}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- On est régi par la loi normale (échantillon > 30)
- l'intervalle aléatoire contenant m au seuil de 95% est donné par : $P(\overline{x} - t_{\alpha}\sigma_{\overline{x}} \leq m \leq \overline{x} + t_{\alpha}\sigma_{\overline{x}}) = 0{,}95$
- En consultant une table P(t) pour p = a = 0,05 t = 1,96 d'où l'intervalle de confiance contenant m au seuil de 95%

$$[\overline{x} - 1{,}96.\sigma_{\overline{x}} \leq m \leq \overline{x} + 1{,}96.\sigma_{\overline{x}}]$$

Corrigé de l'exercice No 24

$$estimation\_ponctuelle\_de\_m = \overline{x} = 15{,}5$$

$$estimation\_ponctuelle\_de\_\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}}s$$

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

- L'intervalle de confiance lié à l'échantillon

$$[15{,}5 - 1{,}96.\frac{4}{\sqrt{299}} \leq m \leq 15{,}5 + 1{,}96.\frac{4}{\sqrt{299}}$$

- [15,05 ; 15,95]

Corrigé de l'exercice No 24

- $t\alpha\ \overline{\sigma(x)} < 0{,}1$ $\qquad \sigma(\overline{x}) = \sigma / \sqrt{n}$ $\qquad \sigma^2 = n/(n-1)\ s^2$

$$t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}1$$

$$t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-1}} \leq 0{,}1$$

$$1{,}96 \ \frac{4}{\sqrt{n-1}} \leq 0{,}1$$

- n = 6147

Exercice No 25 : Estimateur d'une moyenne pour de petits échantillons

- *A la suite d'un accident dans une centrale nucléaire, avec rejet de particules radioactives dans l'atmosphère, un échantillon aléatoire de 16 personnes a été tiré avec probabilités égales dans la ville voisine.*
- *Cet échantillon a été soumis pendant une année à un contrôle d'irradiation.*
- *On désigne par x la mesure du rayonnement reçue par une personne en un an. La variable x est normalement distribuée.*
- *Les résultats de l'échantillon*
- *moyenne x = 15,125 rem*
- *Ecart type s = 4,841*
- *Estimer le rayonnement moyen reçu par les habitants de la ville et déterminer l'intervalle de confiance à 99% de cette estimation*

Corrigé de l'exercice No 25

- L'estimation du rayonnement moyen
- $\bar{x}$ = 15,125 rem
- La variable x étant normalement distribuée dans la population, $\bar{x}$ suit une loi normale, bien que l'effectif de l'échantillon soit inférieur à 30
- Toutefois, σ étant inconnu, la variable

$$T = \frac{\bar{x} - M}{\dfrac{s'}{\sqrt{n}}}$$

- dans laquelle σ est estimé par s' n'est pas une variable normale.
- Le tirage de l'échantillon dans la population normale pouvant être considéré comme effectué avec remise (n petit par rapport à N), T suit une loi de Student-Fisher à n-1 degrés de liberté

Corrigé de l'exercice No 25

- L'intervalle de confiance est donné par

$$\Pr ob\,(\overline{x}-t_{\alpha}\frac{s'}{\sqrt{n}}\leq M\leq \overline{x}+t_{\alpha}\frac{s'}{\sqrt{n}})=0{,}99\quad où\quad t_{\alpha}=2{,}947$$

est donné par une table de Student-Fisher pour ν = n-1 = 15 degrés de liberté et P = α = 0,01

- Compte tenu de la faible taille de l'échantillon, il faut exprimer σ par s' et non par s

$$s'^{2}=\frac{n}{n-1}\,.\,s^{2}=\frac{16}{15}.(4{,}841)^{2}=24{,}9976$$

$$s'=5$$

$$\frac{s'}{\sqrt{n}}=\frac{5}{4}=1{,}25$$

Exercice No 26 : Estimateur d'une fréquence

- *On s'intéresse à la proportion d'individus achetant le journal local dans une petite ville de 10 000 habitants. Sur 100 personnes interrogées, 70 personnes déclarent acheter le journal.*
- *Au seuil de confiance de 80%, estimer la proportion d'individus qui achètent le journal dans la ville*
- *Même question au seuil de 90%*
- *Combien de personnes doit-on interroger au seuil de 90% pour que la précision de l'estimation soit de 5%*

Corrigé de l'exercice No 26

- Variable estimateur fréquence F

$$E(F) = p \quad \sigma(F) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sigma_F$$

- Intervalle aléatoire contenant p au seuil de 80% ($t\alpha$ = 1,28)

  [F - 1,28 σ_F ; F + 1,28 σ_F]

- Intervalle de confiance

$$[0{,}7 - 1{,}28.\sqrt{\frac{0{,}7.0{,}3}{100}}; 0{,}7 + 1{,}28.\sqrt{\frac{0{,}7.0{,}3}{100}}] = [0{,}64 ; 0{,}76]$$

- Même question, au seuil de 90% $t\alpha$ = 1,645
- Intervalle de confiance

$$[0{,}7 - 1{,}645.\sqrt{\frac{0{,}7.0{,}3}{100}}; 0{,}7 + 1{,}645.\sqrt{\frac{0{,}7.0{,}3}{100}}] = [0{,}62;0{,}78]$$

Corrigé de l'exercice No 26

- Il faut tα <= 0,05 si 5% précision absolue

$$t_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq 0{,}05$$

$$1{,}645 \sqrt{\frac{0{,}3.0{,}7}{n}} \leq 0{,}05$$

- au seuil de 90% et en estimant ponctuellement σ_F
- Soit n >= 227,31
- n = 228

Exercice No 27 : échantillonnage

- Une machine d'une chaîne de fabrication découpe des verres de montres dont le diamètre doit être égal à 30 mm.
- Une certaine tolérance, toutefois est acceptée et le disque est considéré conforme si son diamètre est compris entre 29,950 mm et 30,050 mm.
- Les diamètres des verres de montres sont supposés suivre une loi normale.
- Le contrôle de la qualité de la production est fait par un échantillonnage : chaque jour un échantillon de 50 verres est extrait, de façon aléatoire, de la production des 1000 verres fabriqués quotidiennement
- On obtient, lors d'un contrôle, les résultats suivants :

Diamètre	[29,90;29,95]	[29,95;29,99]	[29,99;30,01]	[30,01;30,05]	[30,05;30,10]
Nbre de verres observés	5	12	22	9	2

Corrigé de l'exercice No 27

- Calculez le diamètre moyen et l'écart type de ce diamètre dans l'échantillon ainsi que la proportion de verres conformes
- En déduire une estimation ponctuelle de ses trois paramètres dans la production
- Par intervalle de confiance, au seuil de 98%, estimer le diamètre moyen d'un verre dans la production. Selon la règle énoncée par la direction, si le diamètre moyen estimé est compris dans l'intervalle [29.98 ; 30,02], la qualité est décidée "bonne" sinon, la qualité de la production est décidée "mauvaise" et un réglage de la machine est immédiatement mis en place.
  Etant donné l'échantillon, quelle décision doit-on prendre ?
- Estimer, par intervalle de confiance au seuil de 95%, le nombre de verres conformes produits chaque jour.
- Quelle taille d'échantillon faudrait-il choisir pour que la précision relative de l'estimation de ce nombre de verres conformes soit égale à 10% pour le même seuil de 95%

Corrigé de l'exercice No 27

- X : diamètre d'un verre de montre
- Dans l'échantillon

$$\bar{x} = \frac{\sum ni\, xi}{n} = 29{,}9937\, mm$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum fi\, xi^2}{1} - \bar{x}^2} = 0{,}0336\, mm$$

$$f = \frac{43}{50} = 0{,}86 \; soit \; 86\%$$

Corrigé de l'exercice No 27

- M = diamètre moyen de la production estimé ponctuellement

$$\hat{M} = \bar{x} = 29{,}9937\ mm$$

- σ : écart type de la production estimé ponctuellement par

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.s = 0{,}03397\ mm$$

- p : proportion de pièces conformes dans la production, estimée ponctuellement par :

$$\hat{p} = f = 0{,}86$$

Corrigé de l'exercice No 27

- Estimation d'une moyenne M
- Variable estimateur $\overline{X}$
- $\overline{X} \to \mathcal{N}$ (M; $\sigma(\overline{x})=\sigma / \sqrt{n}$)
- Intervalle aléatoire au seuil de 98%

$$P(\overline{x_1} \leq X \leq \overline{x_2}) = 0{,}98$$

$$P(-t \leq X \leq +t) = 0{,}98$$

- 1-P = α =0,02 => t = 2,33 lu dans P(t) et donc

$$P(\overline{X} - 2{,}33.\sigma(\overline{X}) \leq M \leq \overline{X} + 2{,}33.\sigma(\overline{X})) = 0{,}98$$

- D'ou l'intervalle de confiance
- $\overline{X}$ prend la valeur $\overline{x}$ = 29,9937

Corrigé de l'exercice No 27

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{50}}$$

inconnu est estimé ponctuellement par

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{50}} \; ou \; \frac{s}{\sqrt{49}}$$

$$IC_{0,98}(M) = [29{,}9825\,;\,30{,}0049]$$

L'estimation de M donne un diamètre moyen compris entre 29,9825 et 30,0049 et donc à l'intérieur de l'intervalle considéré comme "bon" par la direction.

La machine n'a pas à être réglée.

Exercice No 28 (Test d'hypothèse)

- ***Dans une grande quincaillerie, il a été inventorié en fin d'exercice un stock physique de 4000 articles dont les prix d'achat vont de quelques euros à plusieurs dizaines d'euros.***
- ***Il n'existe pas d'inventaire permanent.***
- ***Le chef d'entreprise propose une évaluation globale du stock à 96 000 €***
- ***Avant de certifier les états financiers, le commissaire aux comptes fait procéder à un contrôle de cette évaluation par la méthode des sondages.***
- ***Il fait prélever au hasard un échantillon de 100 articles pour lequel il obtient à partir des factures un prix d'achat moyen de 23 euros avec un écart type de 8 euros.***
- ***Peut-il, au seuil de signification de 5%, certifier la proposition d'évaluation faite par le chef d'entreprise***
- ***Indiquer les limites statistiques possibles de l'évaluation du stock.***

Exercice No 29 (Matrices)

- *La production d'une unité de 2 types d'aliments A et B nécessitent :*
  - *2 unités de viande et 1 unité de légumes pour A*
  - *1 unité de viande et 3 unités de légumes pour B*
- *Nous savons :*
  - *Stock journalier de viande de 150 unités*
  - *Stock journalier de légumes de 400 unités*
- *Formaliser le pgm de fabrication permettant d'épuiser complètement les stocks quotidiens*

Corrigé de l'exercice 29

Equation de production													
2	1	*	x	=		A		2	1	*	x	=	150
1	3		y			B		1	3		y		400
			x	=		Inv M	*	150					
			y					400					
			x	=		0,60	-0,20	*		150			
			y			-0,20	0,40			400			
			x	=		10							
			y			130							

Corrigé de l'exercice 29

Equation de production													
2	**1**	*	**x**	**=**		**A**		**2**	**1**	*	**x**	**=**	**150**
1	**3**		**y**			**B**		**1**	**3**		**y**		**400**
			x	**=**		**Inv M**	*	**150**					
			y					**400**					
			x	**=**		**0,6**	**-0**	*		**150**			
			y			**-0,2**	**0,4**			**400**			
			x	**=**		**10**							
			y			**130**							
Marge													
	0,60					**6**							
	0,40					**52**							

Exercice No 30 (programmation linéaire)

- *Optimex fabrique des produits cosmétiques à partir de 2 produits : lanoline et glycérine*
- *Fourniture de lots mixtes*
- *Tout cycle de fabrication nécessite 120 g de lanoline et 90 g de glycérine*
- *Trois fournisseurs possibles*

Fournisseur	Prix du lot	Contenu en lanoline	Contenu en glycérine
X1	120	6	2
X2	132	6	4
X3	60	2	2

- *Pb en équation / Primal ou dual ? / Poser ?*

Corrigé de l'exercice 30

- Contrainte lanoline : $6X1 + 6X2 + 2X3 >= 120$
- Contrainte glycérine : $2X1 + 4X2 + 2X3 >= 90$
- Recherche Min de $120\ X1 + 132\ X2 + 60\ X3$

- Le problème étant la recherche d’un maximum, il faut passer par le dual

Corrigé de l'exercice 30

- Contrainte lanoline : $6X1 + 6X2 + 2X3 >= 120$
- Contrainte glycérine : $2X1 + 4X2 + 2X3 >= 90$
- Recherche Min de $120\ X1 + 132\ X + 60\ X3$

- Le problème étant la recherche d'un maximum, il faut passer par le dual

- Le programme dual
- $6Y1 + 2Y2 <= 120$
- $6Y1 + 4Y2 <= 132$
- $2Y1 + 2Y2 <= 60$
- Recherche Max de $120Y1 + 90Y2$