<u>Exercice d'application</u>

« Soit f la fonction de variable réelle x, définie sur R par :
$f(x) = e^x(e^x + a) + b$ où a et b dont deux constantes réelles.
Les renseignements connus sur f sont donnés dans le [tableau de variation]() ci-dessous.

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
Signe de f'(x)			**0**		
Variations de f	**-3**	↘		↗	

1. Calculer f'(x) en fonction de a (f' désigne la fonction dérivée de f).

2. a) Déterminer a et b en vous aidant des informations contenues dans le tableau ci-dessus.

b) Calculer f(0) et calculer la limite de f en $+\infty$.

3. Résoudre dans R l'équation $e^x(e^x - 2) - 3 = 0$ (on pourra poser $X = e^x$). »

Corrigé

1. La fonction se présente sous forme d'un produit et d'une constante dont on n'a rien à faire. Donc, $(uv)' = u'v + v'u$ avec $u = u' = e^x$, $v = e^x + a$ et $v' = e^x$ et $f'(x) = e^x(e^x + a) + e^x e^x$. Factorisons. Nous obtenons $f'(x) = e^x(e^x + a + e^x)$, soit $f'(x) = e^x(2e^x + a)$.

2. Après la dérivation, jouons à l'identification. Le tableau de signes nous indique que $f'(0) = 0$. Remplaçons. Nous avons $e^0(2e^0 - a) = 0$ et comme $e^0 = 1$, on décèle bien vite la vérité : a n'est autre que -2. Quant à la constante b, elle se découvre grâce à la limite en moins l'infini. On sait que, dans ces contrées lointaines, e^x flirte avec zéro. Il ne nous reste donc plus que la mystérieuse constante b qui se trouve être égale à la limite… D'où $b = -3$.

À présent, notre fonction n'a plus aucun secret : $f(x) = e^x(e^x - 2) - 3$. Le calcul de $f(0)$ ne présente alors pas la moindre difficulté puisque $1(1 - 2) - 3 = -4$. Quant à la limite en plus l'infini, elle est de plus l'infini. Ce n'est même pas une forme indéterminée.

3. En passant, l'énoncé nous fournit aimablement la solution de l'identification. Procédons au changement de variable $X = e^x$ comme nous y sommes invités.

$X(X - 2) - 3 = X^2 - 2X - 3 = 0$. Banal polynôme du second degré. Si vous avez oublié la façon de le résoudre, rendez-vous en page racines d'un trinôme. Deux solutions existent : -1 et 3.

Au moment où nous devons revenir à e^x, stupéfaction : l'exponentielle étant toujours positive, -1 est recalé. La seule solution acceptée vérifie donc l'égalité $e^x = 3$, c'est-à-dire que $x = \ln 3$. La courbe représentative de la fonction f traverse l'axe des abscisses au point $(\ln 3 ; 0)$ et pas ailleurs.