Module 20

MATHEMATIQUES

PROGRAMMATION LINEAIRE
ALGORITHME DU SIMPLEXE
DUALITE

Une série de questions

- Qu'est ce que la programmation linéaire ?
- Quel intérêt dans le domaine de la gestion ?
- Comment résoudre les problèmes de programmation linéaire ?

Plan

- Programmation linéaire
- Principes
- Etude du cas Denis Papin
- Solution graphique sur le plan
- Utilisation du solveur
- Passage en 3+D : difficulté résolution graphique
- Algorithme du simplexe

Le cas Denis Papin est inspiré de «Invitation à la Recherche Opérationnelle » de A. Kaufmann et R. Faure Dunod 1965

QU'EST CE QUE LA PROGRAMMATION LINEAIRE ?

Programmation linéaire

- Héritage de la « Recherche opérationnelle « , science qui a connu beaucoup de succès après le seconde guerre mondiale.
- Objectif : optimisation de l'emploi des ressources.
- Méthode : recherche de l'optimum d'une fonction de plusieurs variables liées entre elles par des contraintes sous forme d'égalités et d'inégalités.
- Contraintes linéaire (C=ax+b) => **Programmation linéaire**
- Regain d'intérêt en fonction de l'augmentation de la puissance des processeurs (supply chain).

Typologie des problèmes

- Premier type : maximisation du profit dégagé par une unité de production (business unit) en fonction des contraintes de limitation des facteurs de production
- Second type : la demande étant fixée, quel est la manière optimale de combiner les ressources de la BU pour la satisfaire (minimisation du coût de production)

Premier type : maximisation du profit

- Production de n biens
- Quantités à produire : $X1, X2, \ldots, Xn >= 0$
- m facteurs de productions
- Quantités des facteurs de production (Qté limitée, d'où contrainte): $b1, b2, \ldots, bm$
- aij : quantité du facteur de production i nécessaire pour produire une unité du bien j
- cj : bénéfice unitaire apporté par Xj
- $a11X1 + a12X2 + \ldots + a1nXn <= b1$
- $a21X1 + a22X2 + \ldots + a2nXn <= b2$
- ……
- $am1X1 + am2X2 + \ldots + amnXn <= bm$
- Maximisation profit : Recherche X1, X2, .. Pour $\max(\sum_{j=1}^{n} cjXj$

Exemple

- Production de 3 (n) voitures : R5, R12, R20
- Quantités à produire (variables): X1, X2, X3 >= 0
- 4 (m) facteurs de productions : acier, alu, plastique, caoutchouc
- Quantités des facteurs de production (Qté limitée, d'où contrainte): 107 500, 80 500, 154 000, 69 500
- aij : quantité du facteur de production i nécessaire pour produire une unité du bien j
- 50*X1 + 75*X2 + 100*X3 <= 107 500 (Acier)
- 50*X1 + 45*X2 + 40*X3 <= 80 500 (Alu)
- 100*X1 + 80*X2 + 70*X3 <= 154 000 (Plastique)
- 40*X1 + 45*X2 + 35*X3 <= 69 500 (Caoutchouc)
- c1 = 35, c2= 45, c3 = 65 : bénéfice unitaire apporté par X1, X2 et X3
- Maximisation profit : Recherche X1, X2, X3 pour max(35*X1 + 45*X2 + 65*X3)

Second type : minimisation des coûts

- Production de m biens
- Qtés à produire (connues) : $b_1, b_2, \ldots, b_n >= 0$
- N facteurs de productions
- Quantités des facteurs de production : $X_1, X_2, \ldots, X_n$
- a_{ij} : quantité de bien i produite à partir de la limite X_j de production j
- c_j : coût unitaire du facteur de production j
- $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n >= b_1$
- $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n >= b_2$
- ……
- $a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n >= b_m$
- Minimisation coût : Recherche X1, X2 pour $\min(\sum_{j=1}^{n} c_jX_j$

Exemples

- Elevage d'animaux exigeant une certaine Qté journalière d'aliments de base au nombre de 3 (m) : lipides, protides, glucides
- Qtés à fournir connues : 246 000, 247 500 et 247 500 >= 0
- 4 (n) aliments Alim, Betay, CowFood et Degust
- Les variables : X1 = Qté de Alim, X2 = Qté de Betay, X3 = Qté de CowFood et X4 = Qté de Degust
- Quantités des facteurs de production Alim(50 lipides, 75 protides,100 glucides), Betay (50, 45, 40), CowFood (100, 80, 70) et Degust (40, 45, 35)
- Aij : quantité du facteur de production i nécessaire pour produire une unité du bien j
- 50*X1 + 50*X2 + 100*X3 + 40*X4 >= 246 000 (lipides)
- 75*X1 + 45*X2 + 80*X3 + 45*X4 >= 247 500 (protides)
- 100*X1 + 40*X2 + 70*X3 + 35*X4 >= 247 500 (glucides)
- c1 = 35, c2= 45, c3 = 65, c4 = 52 : coût unitaire de X1, X2, X3 et X4
- Satisfaction des objectifs au coût minimum : Recherche X1, X2, X3 et X4 pour min(35*X1 + 45*X2 + 65*X3 + 52*X4)

Formalisation des problémes de PL

- Tout pb de PL peut se ramener à l'une des 2 formes remarquables : la forme canonique et la forme standard
- Dans le cas de la recherche de maximisation :
- **Forme canonique**

$$\sum_{j=1}^{n} aij\ Xj <= bi \quad i=1,2,\ldots,m \quad \text{avec Max } Z= \sum_{j=1}^{n} cjXj \text{ et } Xj>=0$$

- **Forme standard**

$$\sum_{j=1}^{n} aij\ Xj = bi \quad i=1,2,\ldots,m \quad \text{avec Max } Z= \sum_{j=1}^{n} cjXj \text{ et } Xj>=0$$

ETUDE DU CAS DENIS PAPIN

Etude du cas Denis Papin

- La société Denis Papin fabrique des autocuiseurs A et des cafetières automatiques B
- Les opérations d'usinage : estampage, reprise, assemblage
- Chaque atelier a une capacité limitée de production

	Autocuiseurs A	**Cafetières B**
Estampage	25 000	35 000
Reprise	33 333	16 667
Assemblage A	22 500	
Assemblage B		15 000

Etude du cas Denis Papin

- La marge sur un autocuiseur est de 15 €
- La marge sur une cafetière est de 12,5 €
- Soit X1 (A) et X2 (B) les productions
- Les pourcentages d'utilisation des capacités des ateliers :

	Autocuiseurs A	**Cafetières B**
Estampage	0,004	0,00286
Reprise	0,003	0,006
Assemblage A	0,00444	
Assemblage B		0,00667

Etude du cas Denis Papin

- Quelles quantités d'autocuiseurs et de cafetières doit on produire pour que le profit soit maximal ?
- Profit = 15*X1 + 12,5*X2

Etude du cas Denis Papin

- Formalisation mathématique du problème posé

Estampage	0,004 X1	+ 0,00286 X2	<=	100
Reprise	0,003 X1	+ 0,006 X2	<=	100
Assemblage A	0,00444 X1		<=	100
Assemblage B		0,00667 X2	<=	100

Etude du cas Denis Papin

- Résolution graphique

Dans le repère (X2, X1) les droites

$x2 = (100-0{,}004X1)/0{,}00286$ Estampage

$x2 = (100-0{,}003X1)/0{,}006$ Reprise

$X1 = 100/0{,}00444$ Ass A

$X2 = 100/0{,}00667$ Ass B

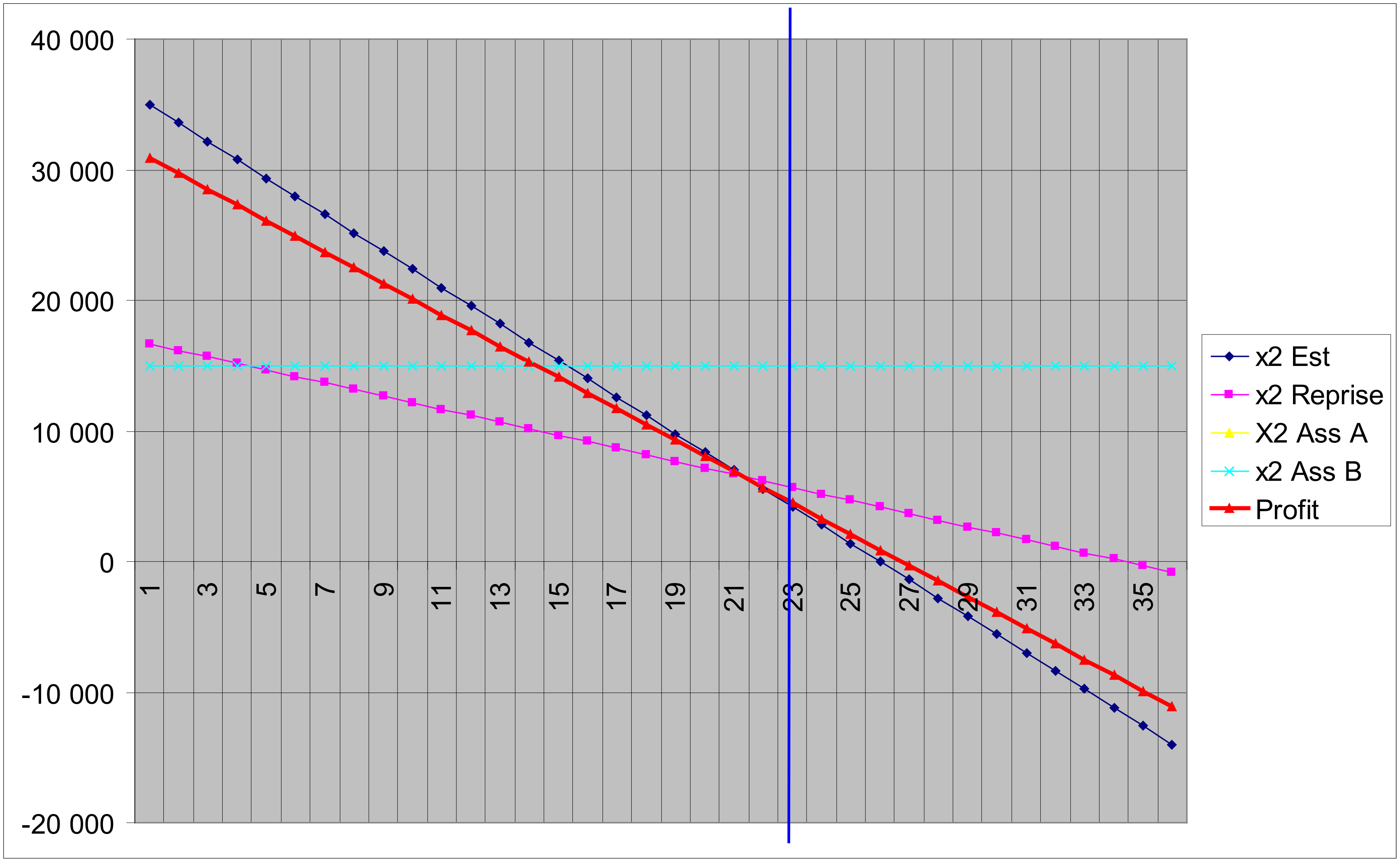
$X2 = (P - 15\ X1)/12{,}5$ Equation du profit

Etude du cas Denis Papin

- Résolution graphique

- Les quatre premières droites définissent un espace (polygone) des solutions possibles
- La droite du profit est une droite de pente constante de paramètre P
- On la fait glisser dans le polyèdre en recherchant la valeur de P maxi

Etude du cas Denis Papin



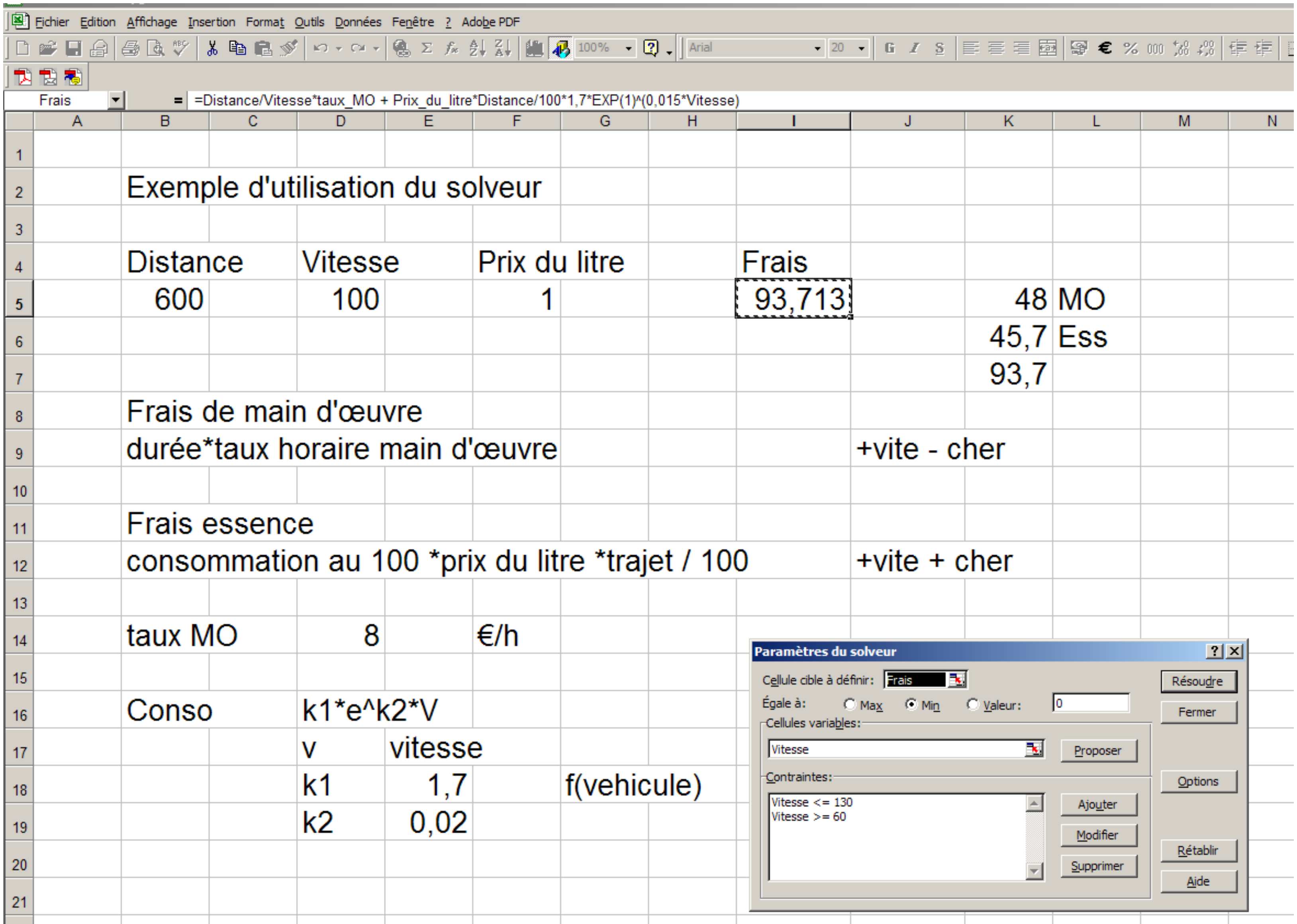
Etude du cas Denis Papin

- Max P = 386 111 €
- Pour x1 = 20 363 et x2 = 6 485
- Ces valeurs correspondent approximativement au point d'intersection des courbes Estampage et Reprise
- Ces deux ateliers sont donc utilisés au maximum de leurs capacités
- Les ateliers d'assemblage sont utilisés à 90% (A) et 43% (B).
- La solution se trouve toujours sur un des sommets du polygone

Etude du cas Denis Papin

- Dans la pratique :
- Utilisation du solveur du tableur

Rappel sur solveur



Etude du cas Denis Papin

Profit = =Qte1*GainX1+Qte2*GainX2

Estampage	0,004 X1 + 0,00286 X2 <= 100
Reprise	0,003 X1 + 0,006 X2 <= 100
Assemblage A	0,00444 X1 <= 100
Assemblage B	0,00667 X2 <= 100

	GainX1	GainX2
Profit = 15*X1 + 12,5*X2	15	12,5

Qte1	Qte2	Profit
20 363	**6 485**	386 511

Contraintes

1	=0,004*Qte1+0,00286*Qte2-100	0	contrainte1
2	=0,003*Qte1+0,006*Qte2-100	0	contrainte2
3	=0,00444*Qte1-100	-9,6	contrainte3
4	=0,00667*Qte2-100	-57	contrainte4

Paramètres du solveur

Cellule cible à définir: Profit

Égale à: (•) Max ( ) Min ( ) Valeur: 0

Cellules variables: variables

Contraintes:
contrainte1 <= 0
contrainte2 <= 0
contrainte3 <= 0
contrainte4 <= 0

Résoudre | Fermer | Proposer | Options | Ajouter | Modifier | Supprimer | Rétablir | Aide

Etude du cas Denis Papin

- Avec l’ouverture des marchés de l’est européen, Denis Papin & Co se propose de fabriquer des samovars.
- La modélisation de la gestion de production se complique et passe à trois dimensions (ou plus si plus de produits, ce qui est le cas général dans la pratique).
- Dans l’espace, le polygone devient polyèdre.
- Nécessité d’une autre méthode.
- La méthode utilisée est la méthode du simplexe.
- La démonstration en a été faite par un mathématicien américain : Georges Dantzig.

Etude du cas Denis Papin

- Nouvelle répartition des contraintes atelier

	Autocuiseurs A	Cafetières B	Samovar C
Estampage	20 000	30 000	12 000
Reprise	30 000	10 000	10 000
Assemblage A	20 000		
Assemblage B		12 000	
Assemblage C			8 000

Etude du cas Denis Papin

- La marge sur un autocuiseur est de 15 €
- La marge sur une cafetière est de 12 €
- La marge sur un samovar est de 14 €
- La nouvelle fonction de profit

$$P = 15\ X1 + 12\ X2 + 14\ X3$$

- Soit X1 (A), X2 (B) et X3 (C) les productions
- Les pourcentages d'utilisation des capacités des ateliers :

	Autocuiseurs A	Cafetières B	Samovars C
Estampage	0,00500	0,00333	0,00833
Reprise	0,00333	0,01000	0,01000
Assemblage	0,00500		
Assemblage		0,00833	
Assemblage			0,01250

Etude du cas Denis Papin

- Formalisation des contraintes Δ

- $\Delta 1$ $0{,}00500\ X1 + 0{,}00333\ X2 + 0{,}00833\ X3 <= 100$
- $\Delta 2$ $0{,}00333\ X1 + 0{,}01000\ X2 + 0{,}01000\ X3 <= 100$
- $\Delta 3$ $0{,}00500\ X1 <= 100$
- $\Delta 4$ $0{,}00833\ X2 <= 100$
- $\Delta 5$ $0{,}01250\ X3 <= 100$

- X1, X2 et X3 >= 0

- Recherche Max(15 X1 + 12 X2 + 14 X3)

Etude du cas Denis Papin

- On remarque en premier lieu que certaines contraintes

 $\Delta 1$ => $\Delta 3$ est toujours vérifiée
$\Delta 2$ => $\Delta 4$ est toujours vérifiée

- En tenant compte des contraints les plus astreignantes, le système se réduit à :

$\Delta 1$ 0,00500 X1 +0,00333 X2 +0,00833 X3 <=100
 $\Delta 2$ 0,00333 X1 +0,01000 X2 +0,01000 X3 <=100
 $\Delta 5$ 0,01250 X3 <= 100

Etude du cas Denis Papin

- Ramenons les inéquations à des équations en introduisant les valeurs d'écart X4, X5 et X6
- Le nouveau système d'équation

$$
\begin{aligned}
0{,}00500\,X1 + 0{,}00333\,X2 + 0{,}00833\,X3 + X4 &= 100 \\
0{,}00333\,X1 + 0{,}01000\,X2 + 0{,}01000\,X3 + X5 &= 100 \\
0{,}01250\,X3 + X6 &= 100 \\
15\,X1 + 12\,X2 + 14\,X3 &= P
\end{aligned}
$$

- Une solution évidente (X1 = X2 = X3 = 0, X4 = 100, X5 = 100, X6 = 100, P = 0) est sans intérêt.

Etude du cas Denis Papin

- La solution graphique nous a montré que la solution se trouvait sur un des sommets du polyèdre.
- Un quelconque des sommets constitue une solution dans laquelle trois des six variables X1 à X6 sont nulles.
- La solution X1 = X2 = X3 = 0 donne le sommet O (Point origine) du polyèdre.
- L'idée est de passer d'un sommet du polyèdre à un autre, en augmentant la valeur de P si possible.
- On choisit la variable qui a dans P le plus grand coefficient positif, soit X1.
- Par substitution, ligne par ligne, on s'arrange pour que demeure un seul coefficient non nul dans la colonne des x1 et que le coefficient des x1 disparaisse dans P.

Etude du cas Denis Papin

- On multiplie la 1ere ligne par 200 pour avoir le coefficient 1 sur X1
- 0,00500 X1 +0,00333 X2 +0,00833 X3 + X4 = 100 devient

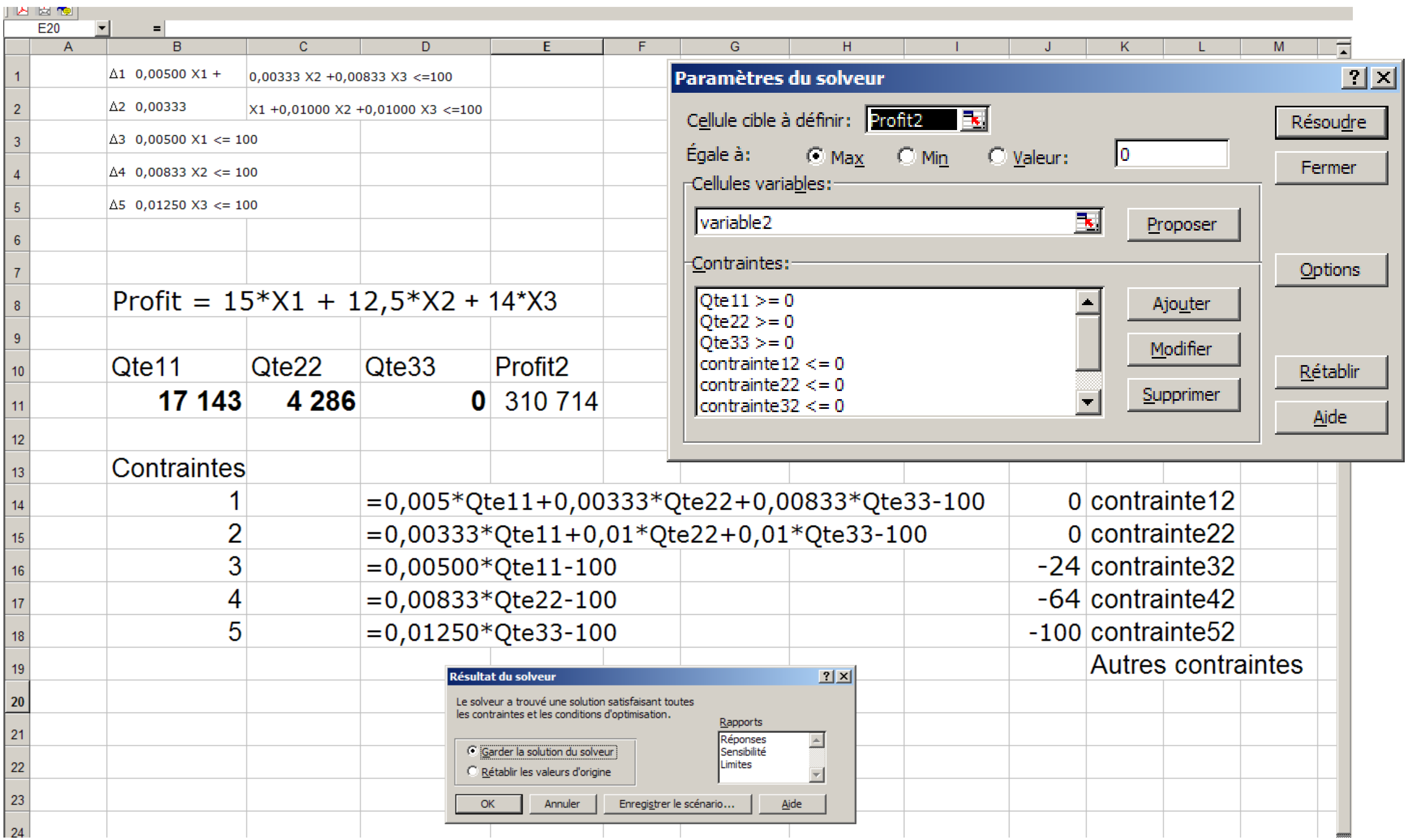
  X1 + 0,666 X2 + 1,666 X3 + 200 X4 = 20000
- On élimine le terme en X1 en combinant avec les autres équations
- Une nouvelle solution apparaît, plus avantageuse que O :
  X2 = X3 = X4 = 0
  X1 = 20 000
  X5 = 33
  X6 = 100
  P = 300 000
- Pour ce point, l'équation de P :
  2 X2 - 11 X3 - 3000 X4 = P - 300 000

Etude du cas Denis Papin

- Le calcul se poursuit en s'intéressant au sommet suivant, cette fois en éliminant X2 du système d'équation
- La solution donne :
  X3=X4=X5 = 0
  X1 = 17143
  X2 = 4286
  P = 310 714
- C'est le point recherché car dans l'équation de P, tous les coefficients sont négatifs

  -12,14 X3 - 2828 X4 - 257 X3 = F - 310 714
- On peut vérifier le résultat par le biais du solveur
- Nécessité d'une démarche formalisée, plus systématique, celle-la même mise en œuvre dans le tableur => **Algorithme du simplexe**

Etude du cas Denis Papin : la solution tableur



Etude du cas Denis Papin

- Bilan de l'étude :
- La fabrication de samovars conduirait à une dégradation du résultat
- Il faut donc se recentrer sur les deux produits de base

ALGORITHME DU SIMPLEXE

Règle pratique du simplexe

- Processus de calcul manuel
- Soit une situation économique, analogue à celle de notre société Denis Papin, décrite par le système d'équation suivant :

  $X1 + 5X2 <= 100$
  $5X1 + 5X2 <= 180$
  $X1 <= 30$

  avec la fonction économique à maximiser

  $P = 400\ X1 + 800\ X2$

- N'oublions pas X1 et X2 sont $>=0$

Règle pratique du simplexe

- En introduisant les variables d'écart, le problème s 'énonce :

$$
\begin{array}{llllll}
1X1 + 5X2 + X3 & & & = 100 \\
5X1 + 5X2 & + X4 & & = 180 \\
1X1 + & & + X5 & = 30
\end{array}
$$

$X1, X2, X3, X4, X5 >= 0$

Avec Max(P = 400 X1 + 800 X2)

Règle pratique du simplexe

- Ce système peut se représenter sous forme matricielle :

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \\ 180 \\ 30 \end{vmatrix}$$

- Les 3 dernières colonnes forment une matrice unité qui constitue la base d'un espace vectoriel à n dimensions (n=nombre de contraintes)
- L'algorithme va progresser de sommet en sommet en ayant soin de ne pas diminuer la valeur de la fonction économique, dans une représentation matricielle i,j ou j représente les vecteurs colonnes de l'espace vectoriel et i le rang des variables

Règle pratique du simplexe

- Tout vecteur de l'espace vectoriel peut être représenté en fonction d'un certain nombre de vecteurs unitaires appelés **base**, qui sont ceux des axes X3, X4 et X5
- Les variables X3, X4 et X5 sont les variables de base
- Les variables X1 et X2 sont les variables hors base

Règle pratique du simplexe

Liste indices de base		Coefficients du système d'équations					valeurs variables base
XB		**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**$\overline{XB}$**
P3		1	5	1	0	0	100
P4		5	5	0	1	0	180
P5		1	0	0	0	1	30
Δj		400	800	0	0	0	P-0

Coefficient de chaque variable dans la fonction économique

Règle pratique du simplexe

- On procède par itération
- On sélectionne dans la ligne des Δj la plus grande valeur positive (1er critère de Dantzig)
- C'est 800 qui correspond à X2
- C'est cette variable qui va **entrer en base**
- On calcule pour chaque ligne i le quotient du terme de XB par le coefficient de la ligne i qui se trouve dans la colonne 2

Règle pratique du simplexe

Liste indices de base	Coefficients du système d'équations					valeurs variables base	
XB	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**XB**	
P3	1	5	1	0	0	100	20
P4	5	5	0	1	0	180	36
P5	1	0	0	0	1	30	#DIV/0!
Δj	400	**800**	0	0	0	P-0	
	Coefficient de chaque variable dans la fonction économique						

Règle pratique du simplexe

- On détermine la **valeur sortante** par application du **second critère de Dantzig**
- C'est la variable correspondant à l'indice de ligne du plus petit rapport positif (20), soit X1
- On repère alors le **pivot**, qui est à l 'intersection de la ligne de la variable sortante (X3) et de la colonne de la variable entrante (X2)
- Le pivot est égal à 5
- On rend le pivot égal à 1 en divisant les éléments de la ligne du pivot par le pivot lui-même

Règle pratique du simplexe

Liste indices de base	Coefficients du système d'équations					valeurs variables base	
XB	P1	P2	P3	P4	P5	$\overline{XB}$	
P3	1	**5**	1	0	0	100	20
P4	5	5	0	1	0	180	36
P5	1	0	0	0	1	30	#DIV/0!
Δj	400	**800**	0	0	0	P-0	

Coefficient de chaque variable dans la fonction économique

Règle pratique du simplexe

- Ancienne ligne du pivot

P3		1	**5**	1	0	0		100	20

- Nouvelle ligne du pivot

P3				**0,2**	**1,0**	**0,2**	**0,0**	**0,0**				**20,0**

- On va ensuite combiner chaque ligne du tableau avec la nouvelle ligne du pivot pour éliminer X2 (X) dans ces lignes

Règle pratique du simplexe

Liste indices de base	Coefficients du système d'équations					valeurs variables base
XB	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**XB**
P3	1,0	**5,0**	1,0	0,0	0,0	100,0
P3	**0,2**	**1,0**	**0,2**	**0,0**	**0,0**	**20,0**
P4	5,0	5,0	0,0	1,0	0,0	180,0
	1,0	5,0	1,0	0,0	0,0	100,0
	4,0	**0,0**	**-1,0**	**1,0**	**0,0**	**80,0**
P5	**1,0**	**0,0**	**0,0**	**0,0**	**1,0**	**30,0**
Δj	400,0	**800,0**	0,0	0,0	0,0	
	160,0	800,0	160,0	0,0	0,0	16000,0
	240,0	**0,0**	**-160,0**	**0,0**	**0,0**	**-16000,0**

Coefficient de chaque variable dans la fonction économique

Règle pratique du simplexe

Le nouveau tableau :

Liste indices de base	Coefficients du système d'équations					valeurs variables base
XB	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**XB**
Y	0,2	**1,0**	0,2	0,0	0,0	20,0
P4	4,0	0,0	-1,0	1,0	0,0	80,0
P5	**1,0**	**0,0**	**0,0**	**0,0**	**1,0**	**30,0**
Δj	240,0	**0,0**	-160,0	0,0	0,0	-16000,0
	Coefficient de chaque variable dans la fonction économique					

Règle pratique du simplexe

- Itération du processus pour remplacer en tant que base la variable d'écart X3 par la deuxième variable recherchée X1 (Y)

Règle pratique du simplexe

								valeurs
Liste indices de base	Coefficients du système d'équations							variables base
XB		**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**		**XB**
Y		0,2	**1,0**	0,2	0,0	0,0		20,0
P4		4,0	0,0	-1,0	1,0	0,0		80,0
P5		**1,0**	**0,0**	**0,0**	**0,0**	**1,0**		**30,0**
Δj		240,0	**0,0**	-160,0	0,0	0,0		-16000,0

Coefficient de chaque variable dans la fonction économique

Règle pratique du simplexe

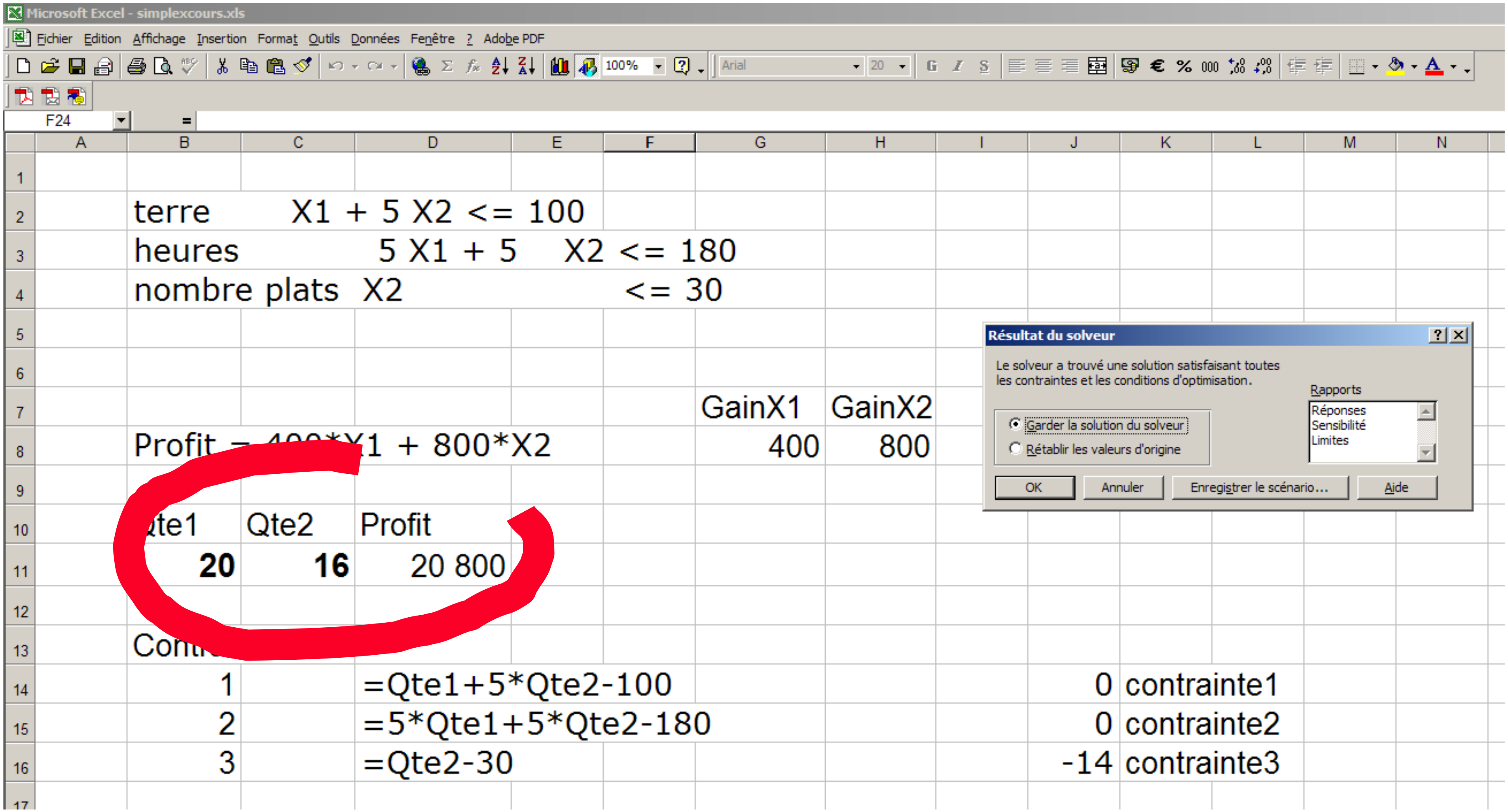
Liste indices de base	Coefficients du système d'équations					valeurs variables base
XB	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**XB**
Y	0,20	1,00	0,20	0,00	0,00	20,00
	0,20	0,00	-0,05	0,05	0,00	4,00
	0,00	**1,00**	**0,25**	**-0,05**	**0,00**	**16,00**
X	4,00	0,00	-1,00	1,00	0,00	80,00
	1,00	**0,00**	**-0,25**	**0,25**	**0,00**	**20,00**
P5	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	30,00
	0,00	**0,00**	**0,25**	**-0,25**	**1,00**	**10,00**
Δj	240,00	**0,00**	-160,00	0,00	0,00	-16000,00
	240,00	0,00	-60,00	60,00	0,00	4800,00
	0,00	**0,00**	**-100,00**	**-60,00**	**0,00**	**-20800,00**
	Coefficient de chaque variable dans la fonction économique					

Règle pratique du simplexe

- La solution :
- X1 (X) = 16
- X2 (Y) = 20
- Profit max P = 20 800

- Voir modèle UV205Math_pgmlineaire2.xls

Règle pratique du simplexe / Vérif tableur



Dualité

- Etant donné un problème de programmation linéaire PL1 mis sous forme canonique
  - Ax <= b (A matrice (m,n))
  - x >= 0 (x vecteur colonne (n,1))
  - Max Z = Cx (c vecteur ligne (1,n)
- On associe à PL1 un autre problème de programmation linéaire PL2 tel que
  - yA >= c (y vecteur ligne (1,m))
  - y >= 0
  - Min Z' = yb
- PL2 est le dual de PL1

Dualité

- Pour passer du primal au dual
- Les termes du second membre du primal deviennent les coefficients de la fonction économique du dual et réciproquement.
- Si le primal est un problème de maximisation, le dual est un problème de minimisation.
- Les inégalités <= deviennent inégalités >=
- La matrice A se change sur le dual en sa transposée

Dualité

Soit le programme linéaire primal

X1 + 2X2 <= 48

3X1 + 4X2 <= 120

X1, X2 >= 0

Recherche Max Z = 5X1 + 6X2

Le programme dual s'exprime

Y1 + 3Y2 >=5

2Y2 + 4Y2 >= 6

Y1; y2>0=0

Recherche Min Z'=48Y1 + 120 Y2

Réponses à nos questions

- Méthode de programmation linéaire pour résoudre les problèmes d'optimisation de gain maxi (le plus grand profit) ou de contrainte mini (le coût le plus faible)
- Processus itératif du simplexe
- Emploi solveur dans la pratique (qui fonctionne selon le même principe)