



***Module 19***  
***MATHÉMATIQUES***

***Matrices***

# Une série de questions

- Quel est l'intérêt des matrices ?
- Qu'est ce qu'une matrice ?
- Quelles opérations sont possibles sur les matrices
- Qu'est ce que l'inversion d'une matrice ? Quel intérêt ?
- Quels fonctions nous offrent les tableurs pour traiter les problèmes de matrices ? Quel intérêt pratique ?



# Plan

- Intérêt des matrices
- Qu'est ce qu'une matrice ?
- Opérations sur les matrices
- Inversion des matrices
- Opérations matricielles dans les tableurs



# Intérêt du calcul matriciel



- Physique
- Statistiques
- Economie
  - Econométrie
  - Production
  - Consommation

# Qu'est ce qu'une matrice ?



- Un tableau rectangulaire de nombres sur lesquels on définit certaines opérations

# Qu'est ce qu'une matrice ?

## Modele excel

En-tête de colonne j

Elément ij de la matrice

|              | Eco | Compta | Droit | Info |
|--------------|-----|--------|-------|------|
| DUPONT       | 12  | 9      | 16    | 15   |
| GARCIA       | 14  | 11     | 15    | 14   |
| HUSSEIN      | 13  | 12     | 15    | 12   |
| MARTIN       | 9   | 12     | 14    | 16   |
| NDIAYE       | 11  | 13     | 14    | 15   |
| RASKOLNIKOFF | 15  | 14     | 13    | 11   |
| SMITH        | 16  | 14     | 12    | 9    |
| STEINER      | 12  | 15     | 12    | 13   |
| TCHAKOUNTE   | 14  | 15     | 11    | 14   |
| THIEU        | 15  | 16     | 9     | 12   |

En-tête de ligne i

# Convention de représentation

- Convention usuelle (Maths)

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| a11 | a12 | a13 |
| a21 | a22 | a23 |

- Notre convention (Tableur)

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| a11 | a12 | a13 |
| a21 | a22 | a23 |

# Convention de représentation

|              | Eco  | Compta | Droit | Info |
|--------------|------|--------|-------|------|
| DUPONT       | a11  | a12    | a13   | a14  |
| GARCIA       | a21  | a22    | a23   | a24  |
| HUSSEIN      | a31  | a32    | a33   | a34  |
| MARTIN       | a41  | a42    | a43   | a44  |
| NDIAYE       | a51  | a52    | a53   | a54  |
| RASKOLNIKOFF | a61  | a62    | a63   | a64  |
| SMITH        | a71  | a72    | a73   | a74  |
| STEINER      | a81  | a82    | a83   | a84  |
| TCHAKOUNTE   | a91  | a92    | a93   | a94  |
| THIEU        | a101 | a102   | a103  | a104 |
|              |      |        |       |      |
|              |      |        |       |      |

# Matrice carrée

- Nombre identique de lignes et de colonnes

|                | <b>Eco</b> | <b>Compta</b> | <b>Droit</b> | <b>Info</b> |
|----------------|------------|---------------|--------------|-------------|
| <b>DUPONT</b>  | <b>a11</b> | <b>a12</b>    | <b>a13</b>   | <b>a14</b>  |
| <b>GARCIA</b>  | <b>a21</b> | <b>a22</b>    | <b>a23</b>   | <b>a24</b>  |
| <b>HUSSEIN</b> | <b>a31</b> | <b>a32</b>    | <b>a33</b>   | <b>a34</b>  |
| <b>MARTIN</b>  | <b>a41</b> | <b>a42</b>    | <b>a43</b>   | <b>a44</b>  |

# Matrice transposée



- Les lignes deviennent colonnes et les colonnes deviennent lignes.
- Fonction Collage spécial Transpose

# Matrice symétrique



|           | Paris | Lyon | Marseille |
|-----------|-------|------|-----------|
| Paris     | 0     | 460  | 800       |
| Lyon      | 460   | 0    | 340       |
| Marseille | 800   | 340  | 0         |

# Matrice diagonale. Matrice Identité.



|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| <b>3</b> | <b>0</b> | <b>0</b> |
| <b>0</b> | <b>7</b> | <b>0</b> |
| <b>0</b> | <b>0</b> | <b>6</b> |

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| <b>1</b> | <b>0</b> | <b>0</b> |
| <b>0</b> | <b>1</b> | <b>0</b> |
| <b>0</b> | <b>0</b> | <b>1</b> |

# Matrice uniligne ou unicolonne : vecteur

|          |           |          |          |           |          |
|----------|-----------|----------|----------|-----------|----------|
| <b>7</b> | <b>12</b> | <b>6</b> | <b>9</b> | <b>11</b> | <b>7</b> |
|----------|-----------|----------|----------|-----------|----------|

|           |
|-----------|
| <b>7</b>  |
| <b>12</b> |
| <b>6</b>  |
| <b>9</b>  |
| <b>11</b> |
| <b>7</b>  |

# Exemples de matrices

- Soit le système à deux équations et à trois inconnues
$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y - z & = & 0 \\ 5x + \phantom{2y} + z & = & 0 \end{array}$$
- On peut représenter les coefficients des inconnues de ce système sous forme d'une matrice

|   |   |    |
|---|---|----|
| 3 | 2 | -1 |
| 5 | 0 | 1  |

# Exemples de matrices

- Soit une entreprise qui fabrique des voitures télécommandées
- Les modèles Action Kart (A) et Super Speed (B) ont besoin de 4 composants  $a, b, c, d$ .
- A nécessite  $4a, 2b, 5c$  et  $3d$
- B nécessite  $5a, 3b, 3c$  et  $4d$
- Ces besoins sont synthétisés dans une matrice dite des coefficients techniques

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 5 | 3 |
| 5 | 3 | 3 | 4 |

# Opérations sur les matrices : Egalité



- Deux matrices sont égales lorsqu'elles sont de même dimension et que les éléments de même indice sont égaux

# Opérations : Somme

| 1er sem      |     |        |       |      |
|--------------|-----|--------|-------|------|
|              | Eco | Compta | Droit | Info |
| DUPONT       | 12  | 9      | 16    | 15   |
| GARCIA       | 14  | 11     | 15    | 14   |
| HUSSEIN      | 13  | 12     | 15    | 12   |
| MARTIN       | 9   | 12     | 14    | 16   |
| NDIAYE       | 11  | 13     | 14    | 15   |
| RASKOLNIKOFF | 15  | 14     | 13    | 11   |
| SMITH        | 16  | 14     | 12    | 9    |
| STEINER      | 12  | 15     | 12    | 13   |
| TCHAKOUNTE   | 14  | 15     | 11    | 14   |
| THIEU        | 15  | 16     | 9     | 12   |

| 2eme semestre |     |        |       |      |
|---------------|-----|--------|-------|------|
|               | Eco | Compta | Droit | Info |
| DUPONT        | 11  | 17     | 16    | 6    |
| GARCIA        | 7   | 13     | 15    | 9    |
| HUSSEIN       | 12  | 12     | 14    | 11   |
| MARTIN        | 9   | 9      | 14    | 6    |
| NDIAYE        | 14  | 15     | 15    | 8    |
| RASKOLNIKOFF  | 6   | 14     | 13    | 9    |
| SMITH         | 9   | 12     | 12    | 8    |
| STEINER       | 11  | 12     | 14    | 11   |
| TCHAKOUNTE    | 10  | 9      | 15    | 10   |
| THIEU         | 15  | 8      | 13    | 12   |

|              | Eco | Compta | Droit | Info |
|--------------|-----|--------|-------|------|
| DUPONT       | 23  | 26     | 32    | 21   |
| GARCIA       | 21  | 24     | 30    | 23   |
| HUSSEIN      | 25  | 24     | 29    | 23   |
| MARTIN       | 18  | 21     | 28    | 22   |
| NDIAYE       | 25  | 28     | 29    | 23   |
| RASKOLNIKOFF | 21  | 28     | 26    | 20   |
| SMITH        | 25  | 26     | 24    | 17   |
| STEINER      | 23  | 27     | 26    | 24   |
| TCHAKOUNTE   | 24  | 24     | 26    | 24   |
| THIEU        | 30  | 24     | 22    | 24   |

# Opérations : Produit d'une matrice par un nombre

|              | Eco | Compta | Droit | Info |       |              | Eco | Compta | Droit |
|--------------|-----|--------|-------|------|-------|--------------|-----|--------|-------|
| DUPONT       | 11  | 17     | 16    | 6    |       | DUPONT       | 22  | 34     | 32    |
| GARCIA       | 7   | 13     | 15    | 9    |       | GARCIA       | 14  | 26     | 30    |
| HUSSEIN      | 12  | 12     | 14    | 11   |       | HUSSEIN      | 24  | 24     | 28    |
| MARTIN       | 9   | 9      | 14    | 6    | Coeff | MARTIN       | 18  | 18     | 28    |
| NDIAYE       | 14  | 15     | 15    | 8    | 2     | NDIAYE       | 28  | 30     | 30    |
| RASKOLNIKOFF | 6   | 14     | 13    | 9    |       | RASKOLNIKOFF | 12  | 28     | 26    |
| SMITH        | 9   | 12     | 12    | 8    |       | SMITH        | 18  | 24     | 24    |
| STEINER      | 11  | 12     | 14    | 11   |       | STEINER      | 22  | 24     | 28    |
| TCHAKOUNTE   | 10  | 9      | 15    | 10   |       | TCHAKOUNTE   | 20  | 18     | 30    |
| THIEU        | 15  | 8      | 13    | 12   |       | THIEU        | 30  | 16     | 26    |

# Opérations : Produit de vecteurs (scalaire)

|                  |     |        |       |      |          |        |    |
|------------------|-----|--------|-------|------|----------|--------|----|
|                  | Eco | Compta | Droit | Info |          | Coeff  |    |
| RASKOLNIKOFF     | 6   | 14     | 13    | 9    |          | Eco    | 3  |
|                  |     |        |       |      |          | Compta | 4  |
|                  |     |        |       |      |          | Droit  | 3  |
|                  |     |        |       |      |          | Info   | 2  |
|                  |     |        |       |      |          | somme  | 12 |
| Resultat pondéré |     |        |       |      |          |        |    |
|                  |     |        |       |      |          |        |    |
|                  | Eco | Compta | Droit | Info | Resultat |        |    |
| RASKOLNIKOFF     | 18  | 56     | 39    | 18   | 131      |        |    |
|                  |     |        |       |      | 10,92    |        |    |

# Opérations : Produit d'une matrice par un vecteur

|   |   |    |
|---|---|----|
| 2 | 4 | 5  |
| 3 | 7 | -1 |

\*

|    |
|----|
| 2  |
| -1 |
| 3  |

=

$$\begin{aligned} &= 2*2 + 4*-1 + 5*3 \\ &= 3*2 + 7*-1 + -1*3 \end{aligned}$$

|    |
|----|
| 15 |
| -4 |

## Postmultiplication

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre d'éléments du vecteur colonne B

| Age Group | Percentage |
|-----------|------------|
| 18-24     | 85%        |
| 25-34     | 15%        |
| 35-44     | 10%        |
| 45-54     | 10%        |
| 55-64     | 10%        |
| 65-74     | 10%        |
| 75-84     | 10%        |
| 85+       | 10%        |

Diagram illustrating the calculation of the dot product of two vectors:

Vector 1:  $[2, -1, 3]$

Vector 2:  $[2, 4, -1]$

Calculation steps:

- $2 \times 2 = 4$
- $-1 \times 4 = -4$
- $3 \times -1 = -3$
- Sum:  $4 - 4 - 3 = -3$

**Le nombre de lignes de la matrice B est égal au nombre d'éléments du vecteur ligne A**

**Pour quelles applications ces formules  
Sont-elles utiles ?**



# Opérations : Produit d'une matrice par un vecteur

| Produit matrice par un vecteur |              |            | Post multiplication |     |         |  |
|--------------------------------|--------------|------------|---------------------|-----|---------|--|
|                                | Acier        | Aluminium  | Caoutchouc          | Fer | Plastiq |  |
| SuperCar                       | 11           | 6          | 2                   | 9   | 5       |  |
| HyperBagnole                   | 12           | 6          | 3                   | 8   | 4       |  |
| BelAuto                        | 9            | 5          | 2                   | 10  | 9       |  |
| TireGeniale                    | 7            | 4          | 2                   | 11  | 11      |  |
|                                |              |            |                     |     |         |  |
| Prix matiere                   |              |            |                     |     |         |  |
|                                |              | Acier      | 200                 |     |         |  |
|                                |              | Aluminium  | 300                 |     |         |  |
|                                |              | Caoutchouc | 350                 |     |         |  |
|                                |              | Fer        | 150                 |     |         |  |
|                                |              | Plastiq    | 120                 |     |         |  |
|                                |              |            |                     |     |         |  |
|                                | Prix matiere |            |                     |     |         |  |
| SuperCar                       | 6650         |            | 6650                |     |         |  |
| HyperBagnole                   | 6930         |            | 6930                |     |         |  |
| BelAuto                        |              |            | 6580                |     |         |  |
| TireGeniale                    |              |            | 6270                |     |         |  |
|                                |              |            |                     |     |         |  |
|                                |              |            |                     |     |         |  |
|                                |              |            |                     |     |         |  |

# Opérations : Produit de deux matrices

|   |   |   |  |   |    |   |  |                   |   |   |  |
|---|---|---|--|---|----|---|--|-------------------|---|---|--|
| 3 | 1 | 4 |  |   |    |   |  | PRODUIT MATRICIEL |   |   |  |
| 2 | 0 | 5 |  |   |    |   |  |                   |   |   |  |
|   |   |   |  | 1 | 0  | 0 |  |                   |   |   |  |
|   |   |   |  | 0 | -1 | 0 |  |                   |   |   |  |
|   |   |   |  | 1 | 1  | 1 |  |                   |   |   |  |
|   |   |   |  |   |    |   |  |                   |   |   |  |
|   |   |   |  |   |    |   |  | 7                 | 3 | 4 |  |
|   |   |   |  |   |    |   |  | 7                 | 5 | 5 |  |

# Opérations : Inversion d'une matrice carrée

- Soit  $A$  une matrice carrée
- On note  $A^{-1}$  l'inverse de la matrice  $A$  telle que :
- $A^{-1} * A = I$  matrice identité
- Plusieurs méthodes permettent d'obtenir l'inverse d'une matrice (déterminant, pivot)
- Fonction Inversemat d'Excel
- Pour pouvoir inverser une matrice, il faut que son déterminant ne soit pas nul

# Résolution matricielle d'un système d'équations linéaires

- $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
  - $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$
  - $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$
- 
- $AX = D$
  - $A^{-1} A X = A^{-1} D$
  - $X = A^{-1} D$

# Exercice No 1

---

- Soient quelques matrices
- Quelles sont celles que l'on peut additionner 2 à 2 ?
- Quelles sont celles que l'on peut multiplier 2 à 2 ?
- Quelles sont celles que l'on peut inverser parmi les matrices carrées ?

| Government          | Percentage |
|---------------------|------------|
| Current government  | 85%        |
| Previous government | 15%        |

|             |                                           |         |
|-------------|-------------------------------------------|---------|
| (C) Trigger | Cours programme Terminale (Mathématiques) | Page 28 |
|-------------|-------------------------------------------|---------|

| Response                                      | Percentage |
|-----------------------------------------------|------------|
| Yes, the current government is responsible    | 80%        |
| No, the current government is not responsible | 20%        |

|             |                                           |         |
|-------------|-------------------------------------------|---------|
| (C) Trigger | Cours programme Terminale (Mathématiques) | Page 29 |
|-------------|-------------------------------------------|---------|

## Exercice No 2

---

- Soient deux matrices
- Vérifier que l'une est l'inverse de l'autre
- Résoudre un système d'équations

| Age Group | Good Job (%) | Not a Good Job (%) |
|-----------|--------------|--------------------|
| 18-29     | 70           | 30                 |
| 30-49     | 70           | 30                 |
| 50-69     | 70           | 30                 |
| 70+       | 70           | 30                 |

|             |                                           |         |
|-------------|-------------------------------------------|---------|
| (C) Trigger | Cours programme Terminale (Mathématiques) | Page 31 |
|-------------|-------------------------------------------|---------|



# Exercice No 3

---

- La production d'une unité de 2 types d'aliments A et B nécessitent :
  - 2 unités de viande et 1 unité de légumes pour A
  - 1 unité de viande et 3 unités de légumes pour B
- Nous savons :
  - Stock journalier de viande de 150 unités
  - Stock journalier de légumes de 400 unités
- Formaliser le pgm de fabrication permettant d'épuiser complètement les stocks quotidiens

| Government          | Percentage |
|---------------------|------------|
| Current government  | 85%        |
| Previous government | 15%        |

|                        |   |   |   |   |       |       |     |     |   |   |   |     |
|------------------------|---|---|---|---|-------|-------|-----|-----|---|---|---|-----|
| Equation de production |   |   |   |   |       |       |     |     |   |   |   |     |
|                        |   |   |   |   |       |       |     |     |   |   |   |     |
|                        |   |   |   |   |       |       |     |     |   |   |   |     |
| 2                      | 1 | * | x | = | A     |       | 2   | 1   | * | x | = | 150 |
| 1                      | 3 |   | y |   | B     |       | 1   | 3   |   | y |   | 400 |
|                        |   |   |   |   |       |       |     |     |   |   |   |     |
|                        |   |   | x | = | Inv M | *     | 150 |     |   |   |   |     |
|                        |   |   | y |   |       |       | 400 |     |   |   |   |     |
|                        |   |   |   |   |       |       |     |     |   |   |   |     |
|                        |   |   | x | = | 0,60  | -0,20 | *   | 150 |   |   |   |     |
|                        |   |   | y |   | -0,20 | 0,40  |     | 400 |   |   |   |     |
|                        |   |   |   |   |       |       |     |     |   |   |   |     |
|                        |   |   | x | = | 10    |       |     |     |   |   |   |     |
|                        |   |   | y |   | 130   |       |     |     |   |   |   |     |

| Government          | Percentage |
|---------------------|------------|
| Current government  | 85%        |
| Previous government | 15%        |

|                        |      |   |   |   |       |     |     |     |   |   |   |     |  |
|------------------------|------|---|---|---|-------|-----|-----|-----|---|---|---|-----|--|
| Equation de production |      |   |   |   |       |     |     |     |   |   |   |     |  |
|                        |      |   |   |   |       |     |     |     |   |   |   |     |  |
|                        |      |   |   |   |       |     |     |     |   |   |   |     |  |
| 2                      | 1    | * | x | = | A     |     | 2   | 1   | * | x | = | 150 |  |
| 1                      | 3    |   | y |   | B     |     | 1   | 3   |   | y |   | 400 |  |
|                        |      |   |   |   |       |     |     |     |   |   |   |     |  |
|                        |      |   | x | = | Inv M | *   | 150 |     |   |   |   |     |  |
|                        |      |   | y |   |       |     | 400 |     |   |   |   |     |  |
|                        |      |   |   |   |       |     |     |     |   |   |   |     |  |
|                        |      |   | x | = | 0,6   | -0  | *   | 150 |   |   |   |     |  |
|                        |      |   | y |   | -0,2  | 0,4 |     | 400 |   |   |   |     |  |
|                        |      |   |   |   |       |     |     |     |   |   |   |     |  |
|                        |      |   | x | = | 10    |     |     |     |   |   |   |     |  |
|                        |      |   | y |   | 130   |     |     |     |   |   |   |     |  |
|                        |      |   |   |   |       |     |     |     |   |   |   |     |  |
|                        |      |   |   |   |       |     |     |     |   |   |   |     |  |
| Marge                  |      |   |   |   |       |     |     |     |   |   |   |     |  |
|                        | 0,60 |   |   |   | 6     |     |     |     |   |   |   |     |  |
|                        | 0,40 |   |   |   | 52    |     |     |     |   |   |   |     |  |

## Exercice No 4

- Une usine fabrique 3 articles X, Y et Z
- Chaque article exige le passage dans 3 ateliers A1, A2, A3
  - X ( $A1=2, A2=5, A3=3$ )
  - Y ( $A1=1, A2=3, A3=2$ )
  - Z ( $A1=1, A2=2, A3=2$ )
- Au cours d'un cycle, la charge horaire a été :
- $A1 = 48, A2=118, A3=81$
- Déterminer les quantités de produits fabriquées
- Les coûts unitaires :  $X=25, Y = 22, Z = 23$
- Coût total de fabrication ?

# Exercices : Production (40)

| Equation de production |   |   |   |   |   |   |   |    |     |    |   |    |    |    |  |
|------------------------|---|---|---|---|---|---|---|----|-----|----|---|----|----|----|--|
|                        |   |   |   |   |   |   |   |    |     |    |   |    |    |    |  |
|                        |   |   |   |   |   |   |   |    |     |    |   |    |    |    |  |
| x                      | y | z | * | 2 | 5 | 3 |   |    |     |    |   |    |    |    |  |
|                        |   |   |   | 1 | 3 | 2 | = | 48 | 118 | 81 |   |    |    |    |  |
|                        |   |   |   | 1 | 2 | 2 |   |    |     |    |   |    |    |    |  |
|                        |   |   |   |   |   |   |   |    |     |    |   |    |    |    |  |
|                        |   |   |   |   |   |   |   | 48 | 118 | 81 | * | 2  | -4 | 1  |  |
|                        |   |   |   |   |   |   |   |    |     |    |   | 0  | 1  | -1 |  |
|                        |   |   |   |   |   |   |   |    |     |    |   | -1 | 1  | 1  |  |
|                        |   |   |   |   |   |   |   |    |     |    |   |    |    |    |  |
|                        |   |   |   |   |   |   |   | 15 | 7   | 11 |   |    |    |    |  |

| Government          | Percentage |
|---------------------|------------|
| Current government  | 85%        |
| Previous government | 15%        |

[illegible]

# Réponses à nos questions

- Intérêt des matrices : dans de nombreux domaines
- Qu'est ce qu'une matrice : un tableau
- Opérations sur les matrices : somme, produit par un scalaire, produit de vecteurs, produit de matrice par un vecteur, produit de matrices
- Inversion de matrices : intéressant pour la résolution d'équations matricielles
- Matrices et tableurs : la saisie des fonctions matricielles, les fonctions produitmat, inversemat et determat d'Excel





# ***MATHÉMATIQUES***

## ***Compléments matrices***

# Objectifs

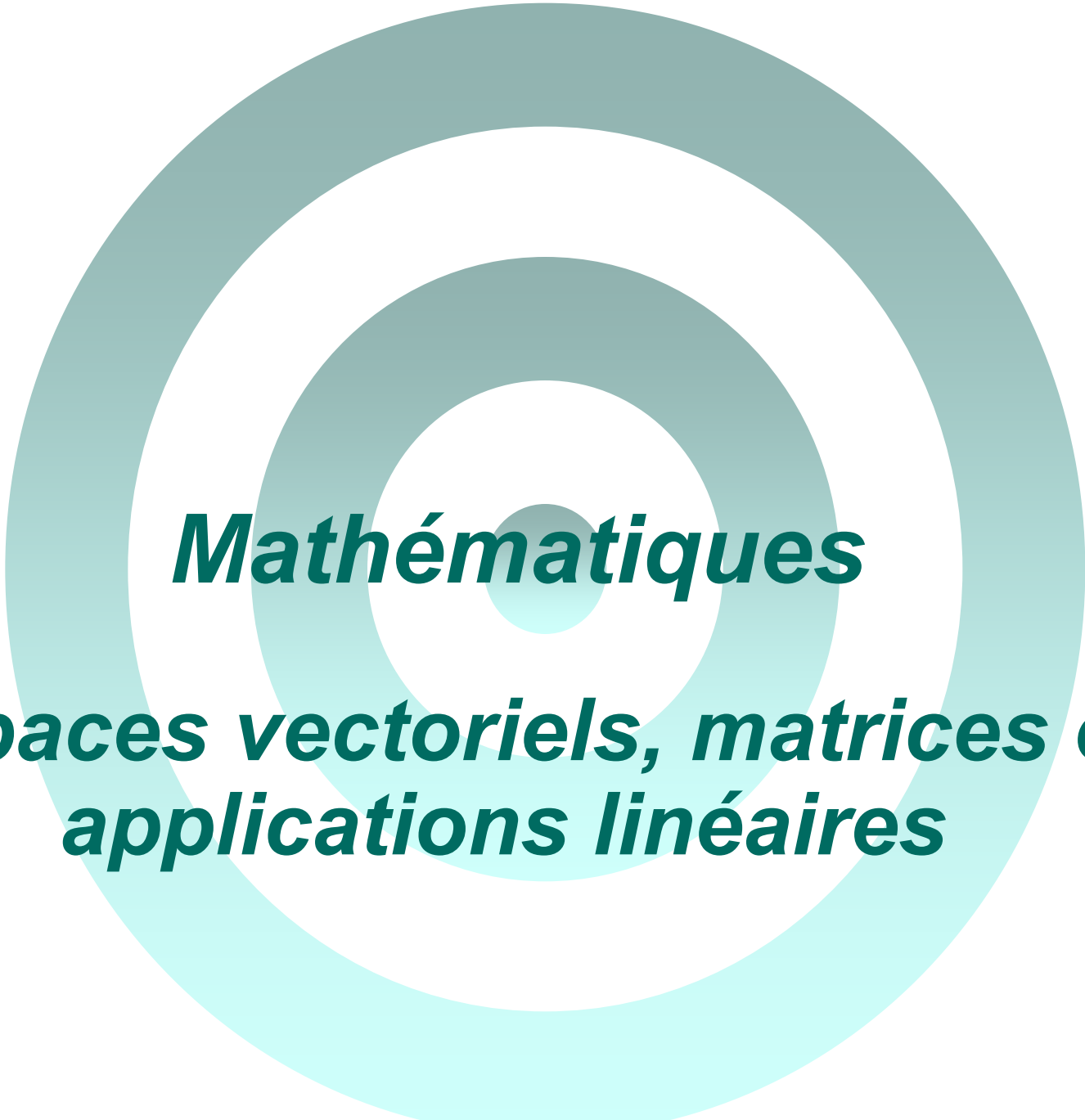
- Approfondir quelques points de la théorie mathématique relative aux matrices et aux applications linéaires



# Plan

- Espaces vectoriels, matrices et applications linéaires
- Retours sur les produits de matrices





# ***Mathématiques***

## ***Espaces vectoriels, matrices et applications linéaires***

# Espaces vectoriels, matrices et applis linéaires



- Les sessions 1 et 2.1 ont été consacrées aux matrices
- Les sessions 2. 2 et 3 ont été consacrées à la programmation linéaire, qui fait état d'applications linéaires (les contraintes) entre variables.
- Pour celle-ci, dans le cadre de la présentation de l'algorithme du simplexe, nous avons fait référence à la notion d'espace vectoriel.
- Il y a une relation très forte entre espace vectoriel, matrices et applications linéaires.

# Espaces vectoriels et matrices

- La définition mathématique de l'espace vectoriel est assez complexe.
- En première approximation on peut le représenter comme l'ensemble des vecteurs  $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \dots, \overrightarrow{V_n}$  que l'on peut définir à partir du point origine dans un référentiel à  $n$  dimensions.
- Les vecteurs que l'on peut définir sont des vecteurs abstraits qui n'ont en commun avec les vecteurs géométriques que les lois de composition, mais nous pouvons nous représenter ceux-ci plus facilement, du moins dans un espace à 2 ou 3 dimensions.

# Espaces vectoriels et matrices

- $p$  vecteurs  $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \dots, \vec{V_n}$  d'un espace vectoriel  $E_p$  sont déterminés par leurs coordonnées  $\vec{V_1}(X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots, X_{1p}), \vec{V_2}(X_{21}, X_{22}, X_{23}, \dots, X_{2p}), \dots, \vec{V_n}(X_{n1}, X_{n2}, X_{n3}, \dots, X_{np})$  dans une base définie par des vecteurs  $i$  ( $i_1, i_2, \dots, i_p$ )
- Il est commode de représenter cet ensemble de la façon suivante :
  - $\vec{V_1} \quad \vec{V_2} \quad \dots \quad \vec{V_n}$
  - $i_1 \quad X_{11} \quad X_{12} \quad \dots \quad X_{1n}$
  - $i_2 \quad X_{21} \quad X_{22} \quad \dots \quad X_{2n}$
  - .....  
.....
  - $i_p \quad X_{p1} \quad X_{p2} \quad \dots \quad X_{pn}$

# Espaces vectoriels et matrices

Les vecteurs  $i$  constituent la **base** (au sens d'une base pour système de coordonnées)



Les vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  d'un espace vectoriel  $E_p$  sont déterminés par leurs coordonnées  $\vec{v}_1(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1p}), \vec{v}_2(x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots, x_{2p}), \dots, \vec{v}_n(x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots, x_{np})$  dans une base définie par les vecteurs  $i$  ( $i_1, i_2, \dots, i_p$ )

- Il est commode de représenter cet ensemble de la façon suivante :

|       |             |             |      |             |
|-------|-------------|-------------|------|-------------|
|       | $\vec{v}_1$ | $\vec{v}_2$ | .... | $\vec{v}_n$ |
| $i_1$ | $x_{11}$    | $x_{12}$    | .... | $x_{1n}$    |
| $i_2$ | $x_{21}$    | $x_{22}$    | .... | $x_{2n}$    |
| ..... |             |             |      |             |
| $i_p$ | $x_{p1}$    | $x_{p2}$    | .... | $x_{pn}$    |

Nous reconnaissons ici une **matrice**



# Espaces vectoriels et matrices

- Un problème classique est celui du changement de base ( $E_1 \rightarrow E_2$ )
- L'espace  $E_2$  était rapporté à une première base  $B(i_1, i_2, \dots, i_p)$ , dite ancienne, dans laquelle un vecteur  $\vec{v}_n$  a pour coordonnées  $(X_{1n} \ X_{2n} \ \dots \ X_{pn})$ .
- $E_2$  est rapporté à une nouvelle base  $B'(j_1, j_2, \dots, j_p)$ , dans laquelle le vecteur  $\vec{v}_n$  a pour coordonnées  $(X'_{1n} \ X'_{2n} \ \dots \ X_{pn})$ .

# Espaces vectoriels et matrices

- Pour simplifier, considérons un espace vectoriel à 2 dimensions
- Soit  $V$  défini avec la base  $B(i,j)$
- $\vec{V} = X \vec{i} + Y \vec{j}$
- $V$  défini avec la base  $B'(i',j')$
- $\vec{V} = X' \vec{i}' + Y' \vec{j}'$
- Nous avons donc
- $\vec{V} = X \vec{i} + Y \vec{j} = X' \vec{i}' + Y' \vec{j}'$

# Espaces vectoriels et matrices

- On résoud l'équation en exprimant les vecteurs  $i'$  et  $j'$  dans l'ancienne base
- $i' = ai + bj$
- $j' = a'i + b'j$
- On appelle matrice de passage de la base  $B$  à la base  $B'$  la matrice dont les vecteurs-colonnes sont les vecteurs de la nouvelle base exprimée dans l'ancienne

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

# Représentation d'une application linéaire par une matrice

- Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels
- Soit une base  $U(u_1, u_2, \dots)$  dans  $E$
- Soit une base  $V(v_1, v_2, \dots)$  dans  $F$
- Soit  $X$  un vecteur de  $E$
- $X = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n$
- L'application linéaire  $f$  lui fait correspondre un vecteur  $f(X)$  de  $F$
- $f(X) = f(u_1)x_1 + f(u_2)x_2 + \dots + f(u_n)x_n$
- Le problème est de même nature que le précédent avec une matrice de transformation constituée cette fois des coordonnées des vecteurs de la base de  $E$  dans la base  $V$  de  $F$

# Représentation d'une application linéaire par une matrice

|       |       |   |       |       |
|-------|-------|---|-------|-------|
|       |       |   |       | x1    |
|       |       |   |       | x2    |
|       |       |   |       | x3    |
|       |       |   |       | ...   |
|       |       |   |       | ...   |
|       |       |   |       | ...   |
|       |       |   |       | xn    |
|       |       |   |       |       |
| a11   | a12   | : | a1n   | y1    |
| a21   | a22   | : | a2n   | y2    |
| a31   | a32   | : | a3n   | y3    |
| ..... | ..... | : | ..... | ..... |
| ap1   | ap2   | : | apn   | yp    |

$$y_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n$$

$$j=1, 2, \dots, p$$

Application notée  $Y = A X$

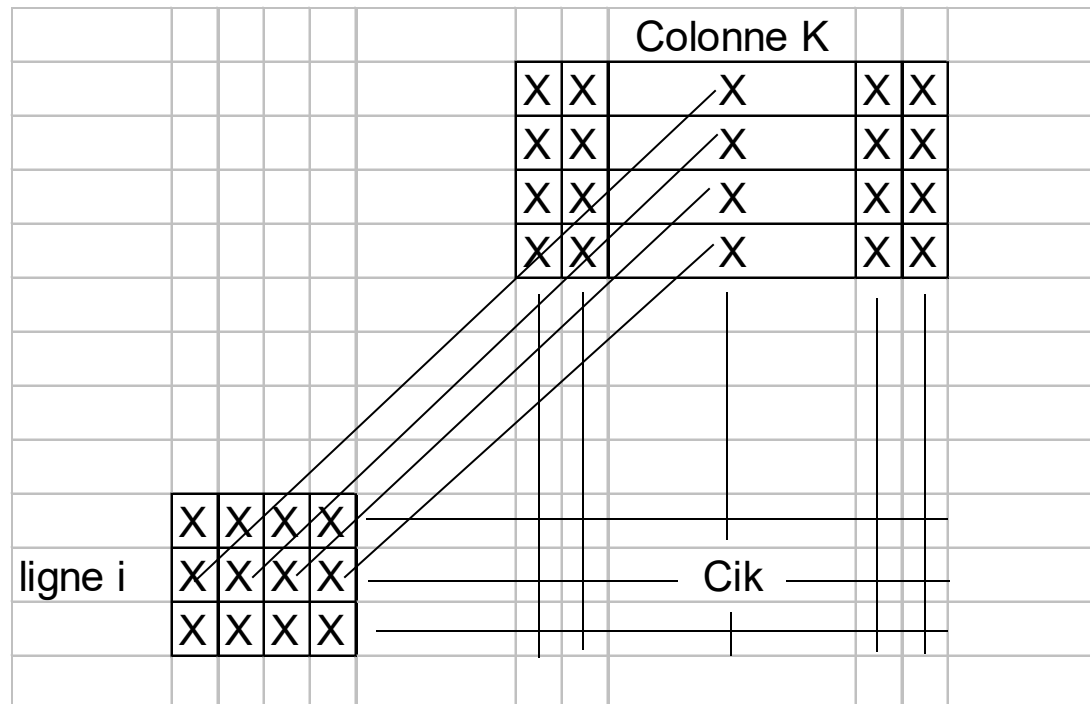


# ***Mathématiques***

## ***Retour sur les produits de matrices***

# Espaces vectoriels et matrices

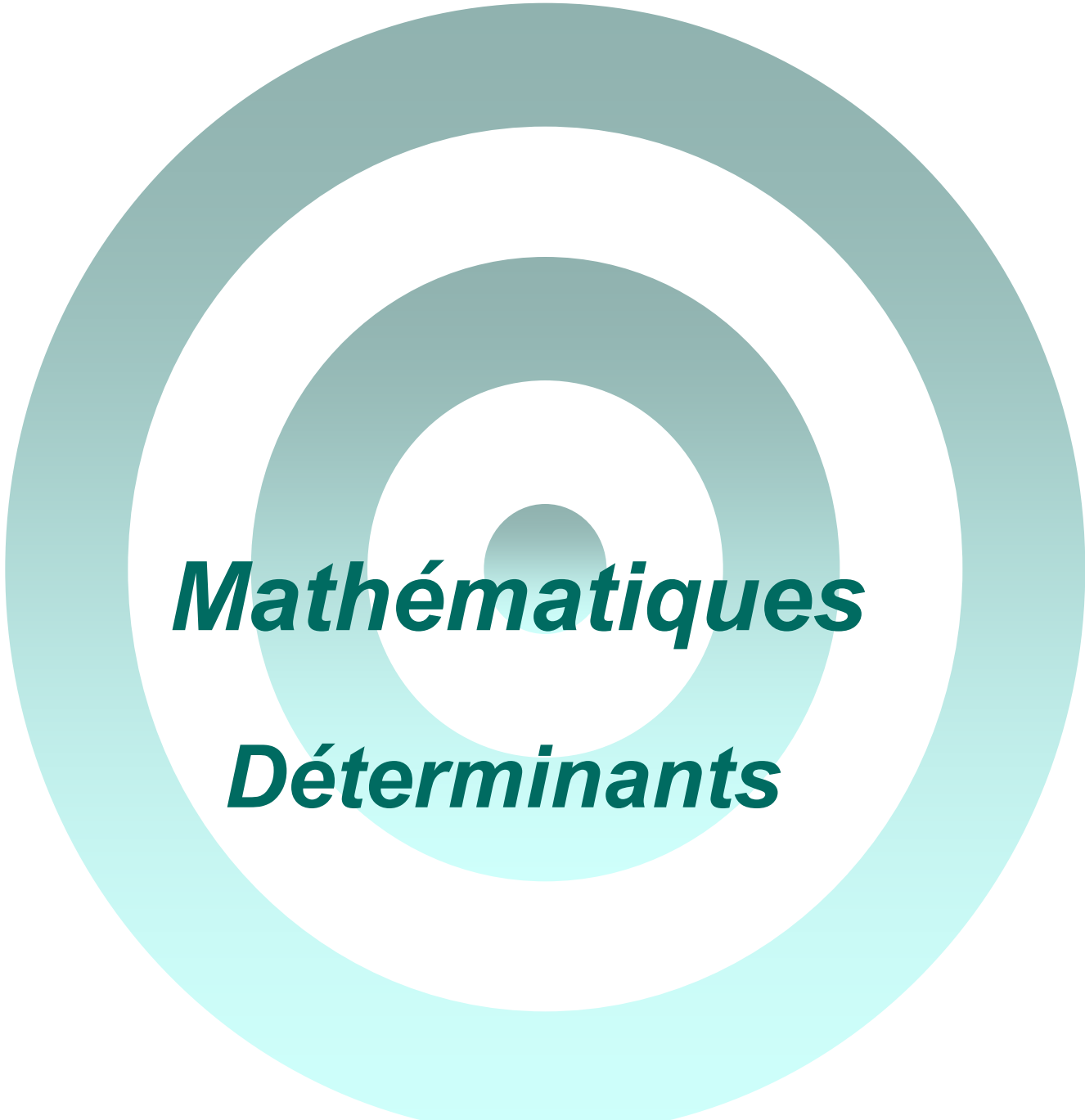
- De manière pratique, on peut poser le produit de matrice de la manière suivante



# Espaces vectoriels et matrices

- Application au produit de vecteurs

|      |     |      |       |      |    |       |     |
|------|-----|------|-------|------|----|-------|-----|
|      | Eco | Comp | Droit | Info |    | Coeff |     |
| M. R | 6   | 14   | 13    | 9    |    | Eco   | 3   |
|      |     |      |       |      |    | Comp  | 4   |
|      |     |      |       |      |    | Droit | 3   |
|      |     |      |       |      |    | Info  | 2   |
|      |     |      |       |      |    |       | 3   |
|      |     |      |       |      |    |       | 4   |
|      |     |      |       |      |    |       | 3   |
|      |     |      |       |      |    |       | 2   |
|      |     |      |       |      |    |       |     |
|      |     | 6    | 14    | 13   | 9  |       |     |
|      |     |      |       |      |    |       | 131 |
|      |     |      |       | 6    | 14 | 13    | 9   |
|      |     | 3    |       |      |    |       |     |
|      |     | 4    |       |      |    |       |     |
|      |     | 3    |       |      |    |       |     |
|      |     | 2    |       |      |    |       |     |
|      |     |      |       | 18   | 42 | 39    | 27  |
|      |     |      |       | 24   | 56 | 52    | 36  |
|      |     |      |       | 18   | 42 | 39    | 27  |
|      |     |      |       | 12   | 28 | 26    | 18  |

The background of the slide features a series of concentric circles. The outermost circle is a light teal color. Inside it is a white circle, followed by a teal ring, then another white circle, and finally a teal ring at the center. The text is centered within these circles.

# ***Mathématiques***

## ***Déterminants***

# Déterminant

- La théorie des déterminants est complexe puisqu'elle fait appel aux concepts peu aisés de fonction alternée et de forme multilinéaire.
- Il faut donc avoir une approche pragmatique -du type recette- des problèmes de déterminants
- Le calcul d'un déterminant du second ordre est bien connu

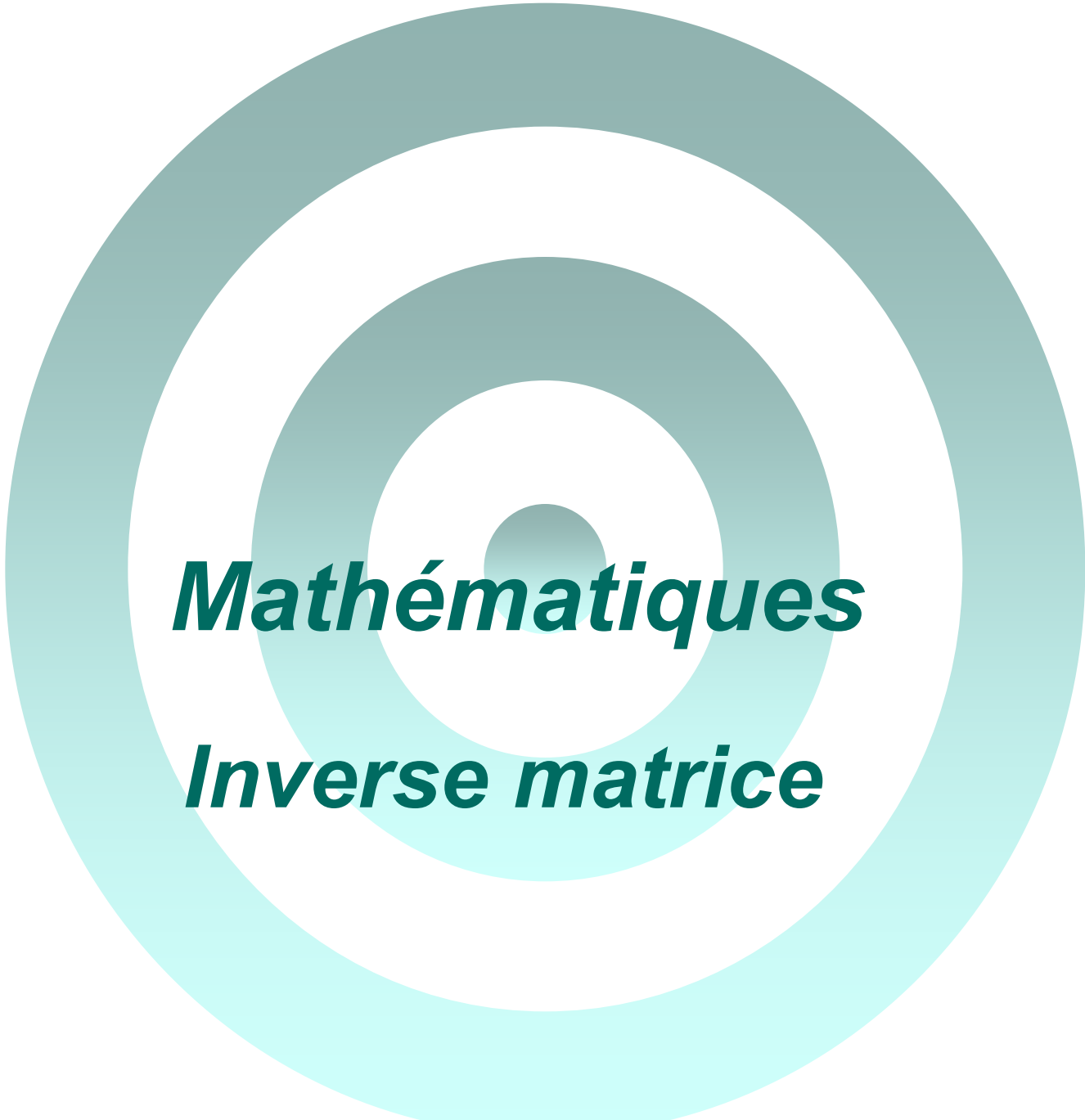
- $D = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$

- $D = ab' - ba'$

# Déterminant

- Cette formule suit une logique de permutation extensible au 3ème ordre

|  |          |         |         |         |         |         |         |  |                          |  |  |  |
|--|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--|--------------------------|--|--|--|
|  |          |         |         |         |         |         |         |  |                          |  |  |  |
|  |          | a       |         | a'      |         |         |         |  |                          |  |  |  |
|  |          | b       |         | b'      |         |         |         |  |                          |  |  |  |
|  |          |         |         |         |         |         |         |  |                          |  |  |  |
|  | lignes   | 1 2     |         | 2 1     |         | a = 11  | b = 21  |  |                          |  |  |  |
|  | colonnes | 1 2     |         | 1 2     |         | b' = 22 | a' = 12 |  | Notez constance colonnes |  |  |  |
|  | D =      | ab'     | -       | ba'     |         |         |         |  |                          |  |  |  |
|  |          |         |         |         |         |         |         |  |                          |  |  |  |
|  |          | a       | a'      | a''     |         |         |         |  |                          |  |  |  |
|  |          | b       | b'      | b''     |         |         |         |  |                          |  |  |  |
|  |          | c       | c'      | c''     |         |         |         |  |                          |  |  |  |
|  |          |         |         |         |         |         |         |  |                          |  |  |  |
|  | lignes   | 123     | 132     | 312     | 213     | 231     | 321     |  |                          |  |  |  |
|  | colonnes | 123     | 123     | 123     | 123     | 123     | 123     |  |                          |  |  |  |
|  |          | ab'c''- | ac'b''+ | ca'b''- | ba'c''+ | bc'a''- | cb'a''  |  |                          |  |  |  |
|  |          |         |         |         |         |         |         |  |                          |  |  |  |

The background of the slide features a series of concentric circles. The innermost circle is a small dark teal dot. This is followed by a white ring, then a teal ring, another white ring, and finally a large outer teal ring that fills most of the slide's width and height.

# ***Mathématiques***

## ***Inverse matrice***

# Inverse matrice



- Plusieurs méthodes possibles
- Les plus pratiquées :
  - Méthode des déterminants
  - Méthode des combinaisons linéaires
- Méthodes fastidieuses qui imposent le recours à l'ordinateur pour les rangs  $> 3$

# Méthode des déterminants

- Trois étapes (2ème ordre)
  1. Calcul du déterminant  
(cf § précédent :  $ab' - ba'$ )
  2. Obtention matrice adjointe : permuter les éléments  $a$  et  $b'$ , changer le signe des termes  $a' b$ .
  3. Multiplication de la matrice adjointe par l'inverse du déterminant.

| Age Group | Percentage |
|-----------|------------|
| 18-24     | 35%        |
| 25-34     | 25%        |
| 35-44     | 15%        |
| 45-54     | 10%        |
| 55-64     | 8%         |
| 65-74     | 5%         |
| 75-84     | 3%         |
| 85+       | 2%         |

- |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 |   | 5 | 2 |   | . | . |
| x | 1 | * | 4 | 3 | = | 0 | . |
- Calcul de c21
- |   |   |  |   |   |
|---|---|--|---|---|
|   |   |  | 5 | 2 |
|   |   |  | 4 | 3 |
| 1 | 0 |  |   |   |
| x | 1 |  |   |   |
- $5x+4=0$   $x=-4/5$
- |      |   |   |   |   |   |   |     |
|------|---|---|---|---|---|---|-----|
| 1    | 0 |   | 5 | 2 |   | 5 | 2   |
| -0,8 | 1 | * | 4 | 3 | = | 0 | 1,4 |

# Méthode des combinaisons linéaires

- Multiplication du résultat par une autre matrice C2 pour obtenir une nouvelle colonne avec 0

|               |      |   |   |     |       |     |          |      |
|---------------|------|---|---|-----|-------|-----|----------|------|
| 1             | x    |   | 5 | 2   |       | .   | 0        |      |
| 0             | 1    | * | 0 | 1,4 | =     | .   | .        |      |
|               |      |   |   |     |       |     |          |      |
|               |      |   |   |     |       |     |          |      |
| Calcul de c12 |      |   |   |     |       |     |          |      |
|               |      |   |   |     | 5     | 2   |          |      |
|               |      |   |   |     | 0     | 1,4 |          |      |
|               |      |   | 1 | x   | ————— |     | 2+1,4x=0 |      |
|               |      |   | 0 | 1   |       |     | x=       | -1,4 |
|               |      |   |   |     |       |     |          |      |
|               |      |   |   |     |       |     |          |      |
| 1             | -1,4 |   | 5 | 2   |       | 5   | 0        |      |
| 0             | 1    | * | 0 | 1,4 | =     | 0   | 1,4      |      |
|               |      |   |   |     |       |     |          |      |
|               |      |   |   |     |       |     |          |      |

# Méthode des combinaisons linéaires

- Pour obtenir la matrice unitaire, il suffit de prémultiplier  $C2.C1.M$  par une matrice diagonale  $D$  avec les valeurs adéquates

|     |      |   |   |     |   |   |   |
|-----|------|---|---|-----|---|---|---|
| 0,2 | 0    |   | 5 | 0   |   | 1 | 0 |
| 0   | 0,71 | * | 0 | 1,4 | = | 0 | 1 |

- Nous avons donc  $D.C2.C1.M=I$
- Or  $M^{-1}.M = I \Rightarrow M^{-1} = D.C2.C1$

# Méthode des combinaisons linéaires

•  $M-1 = D.C2.C1$

|  |       |       |   |   |      |   |      |   |  |
|--|-------|-------|---|---|------|---|------|---|--|
|  |       |       |   |   |      |   |      |   |  |
|  | 0,2   | 0     |   | 1 | -1,4 |   | 1    | 0 |  |
|  | 0     | 0,71  | * | 0 | 1    | * | -0,8 | 1 |  |
|  |       |       |   |   |      |   |      |   |  |
|  | 0,2   | -0,3  |   |   |      |   |      |   |  |
|  | 0     | 0,71  |   |   |      |   |      |   |  |
|  |       |       |   |   |      |   |      |   |  |
|  | 0,43  | -0,29 |   |   |      |   |      |   |  |
|  | -0,57 | 0,71  |   |   |      |   |      |   |  |
|  |       |       |   |   |      |   |      |   |  |