Module 15

MATHEMATIQUES

C06 - PROBABILITES – STATISTIQUES No 6

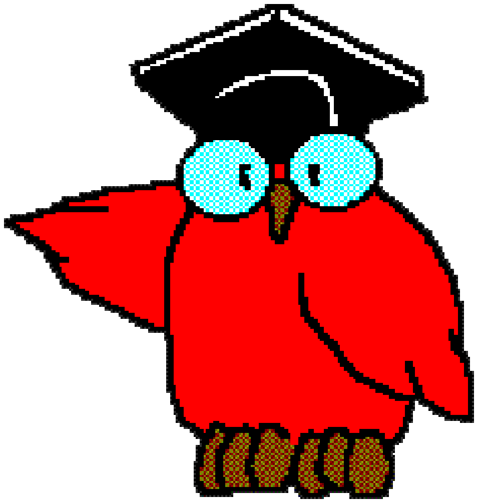
VARIABLES ALEATOIRES ET LOIS DE PROBABILITE CONTINUES

Objectifs

- Notre démarche d'analyse s'adresse maintenant aux variables aléatoires continues.

Plan

- Variable aléatoire continue
- Loi de probabilité continue
- Extension à deux dimensions
- Caractéristiques d'une variable aléatoire continue
- Loi normale
- Loi de probabilité exponentielle
- Validité de l'ajustement d'une loi de probabilité à une distribution observée

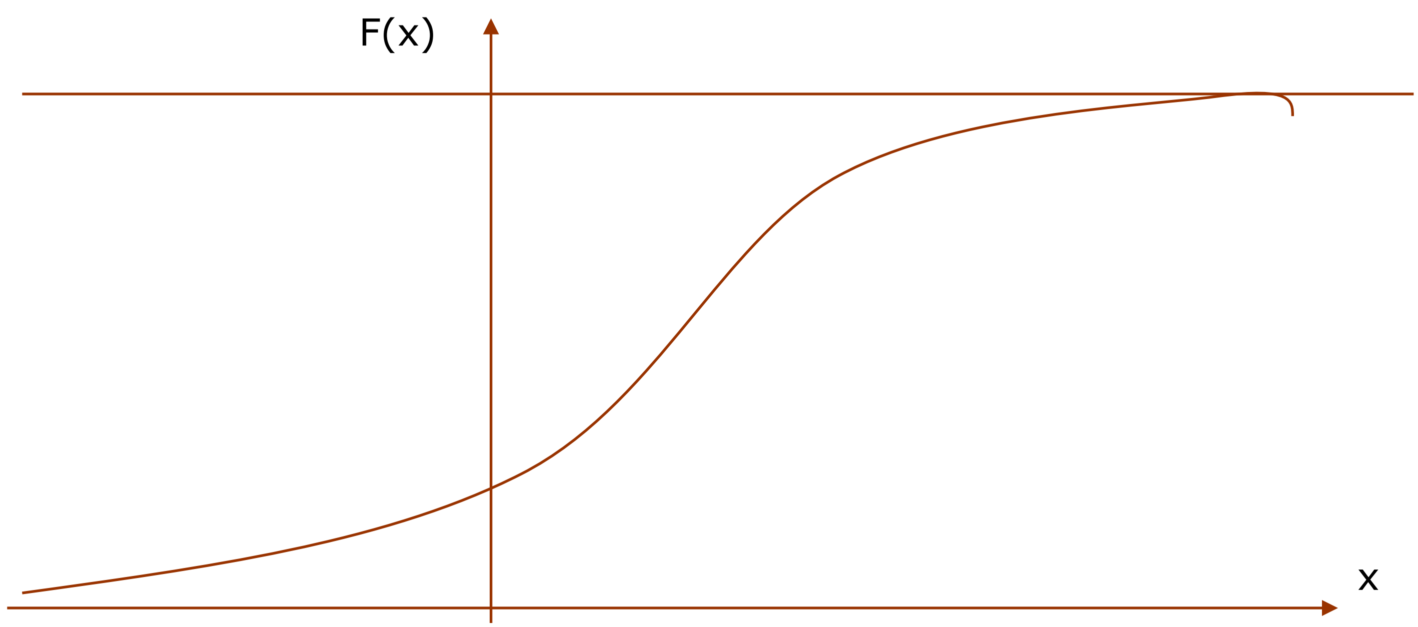


Variable aléatoire continue

- Une variable aléatoire continue est une variable dont l'ensemble de définition est un intervalle (ou une réunion d'intervalles)
- Dans le cas d'une variable aléatoire continue, la définition de la loi de probabilité qui lui est attachée exige quelques précautions.
- Le nombre de points que contient l'intervalle de définition est infini non dénombrable.
- Il en résulte qu'à une valeur déterminée de la variable aléatoire correspond une probabilité nulle.
- On est donc conduit à définir la loi de probabilité de x par la probabilité que appartienne à l'intervalle ouvert $\left]-\infty, x\right[$
- c'est à dire par sa fonction de répartition

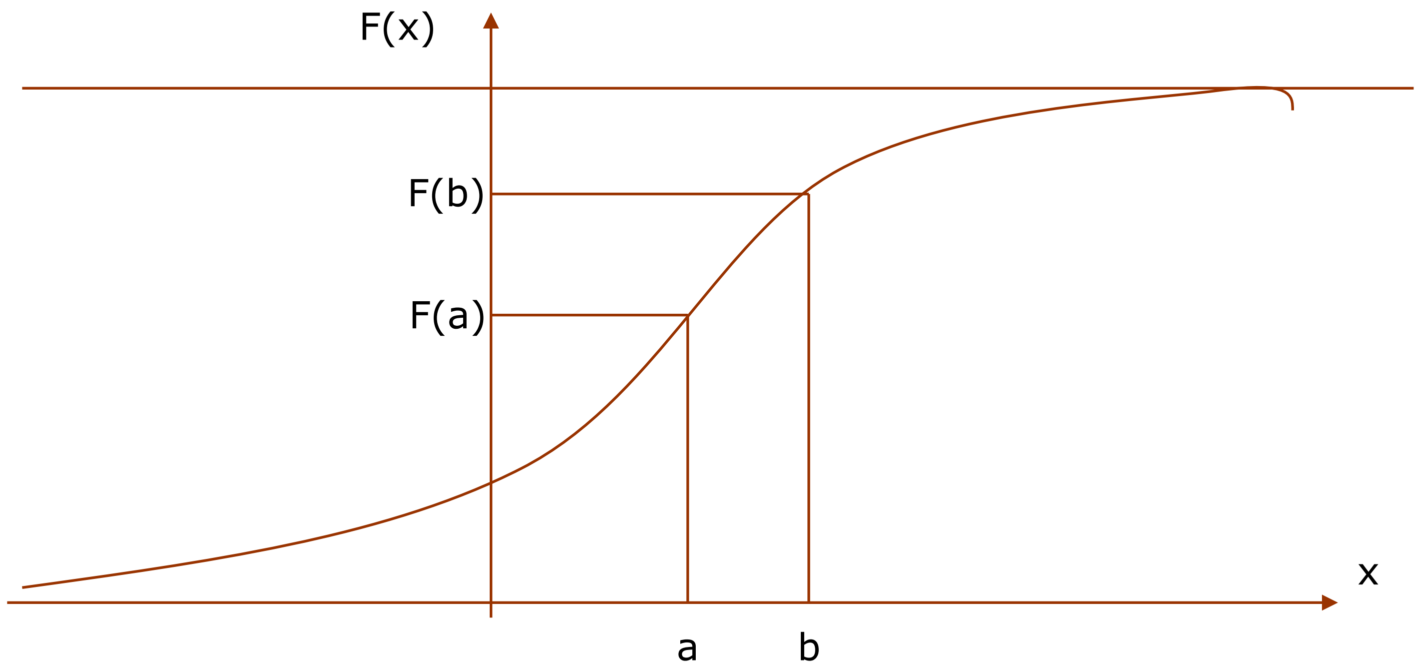
Loi de probabilité continue

- La loi de probabilité d'une variable aléatoire continue est définie par sa fonction de répartition F(x)
- $F(x) = P(X<x)$
- F(x) est une fonction positive croissante avec
- lim F(x) = 0 quand x -> - oo
- lim F(x) = 1 quand x -> + oo
- La représentation graphique de la fonction de répartition est la courbe cumulative ou courbe de répartition.



Probabilité attachée à un intervalle

- $P(a<=X<b) = P(X<b) - P(X<=a) = F(a) - F(b)$



Densité de probabilité

- Densité moyenne

$$f(a,b) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

- Densité en un point : dérivée de la fonction de répartition (par définition de la dérivée)

Probabilité élémentaire

- Probabilité élémentaire pour que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure à l'intervalle dx entourant le point x :

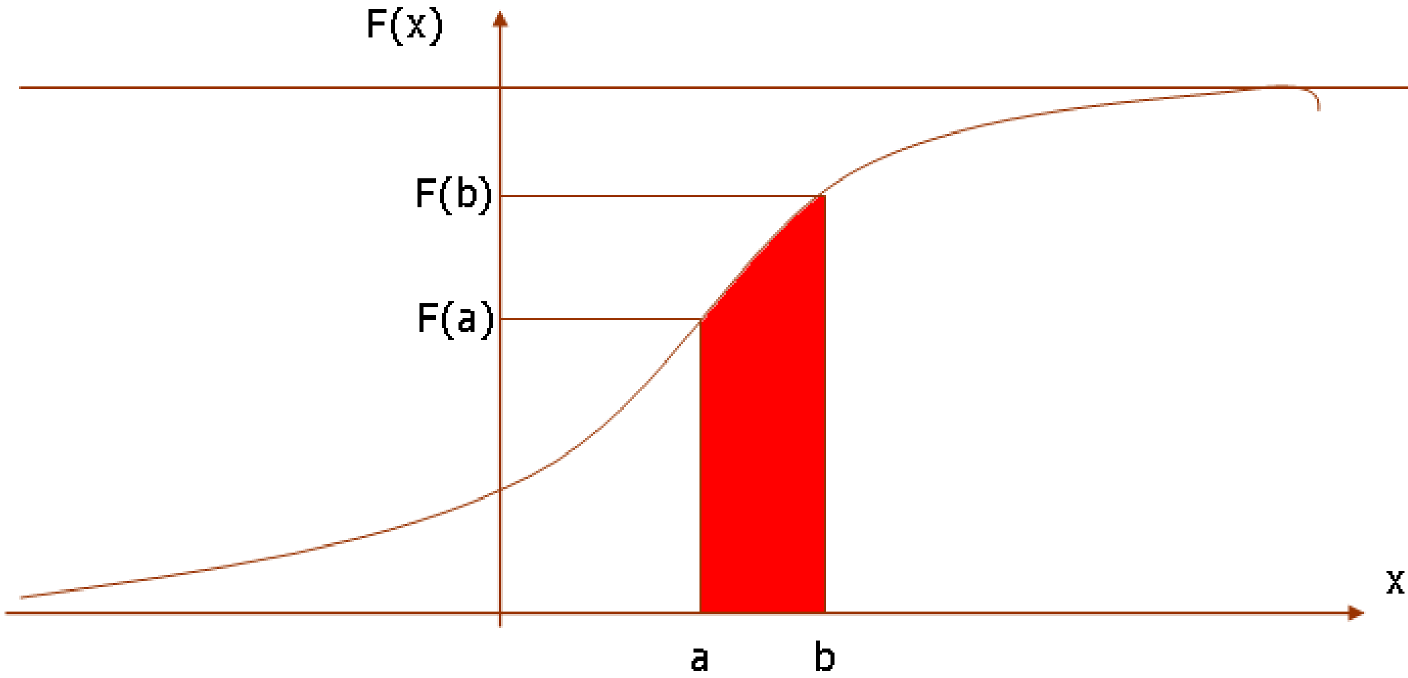
$$P(x \leq X < x + dx) = f(x)dx$$

- Dans l'intervalle (a,b)

$$P(a \leq X < b) = \int_{b}^{a} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Cette probabilité correspond à l'aire rouge

Probabilité élémentaire



- L'aire comprise entre la courbe de densité de probabilité et l'axe des abcisses est égale à 1.

Caractéristique d'une variable aléatoire

- La définition de l'espérance mathématique, de la variance et de la covariance s'appliquent aux variables aléatoires continues.
- Propriétés identiques que pour les variables discrètes

Loi Normale

- La loi normale ou loi de Laplace-Gauss est une des distributions que l'on rencontre le plus souvent.
- C'est la loi suivie par une variable aléatoire qui est la résultante d'un grand nombre de causes indépendantes dont les effets s'additionnent et dont aucune n'est prépondérante.

Loi Normale

- La densité de probabilité de la loi normale

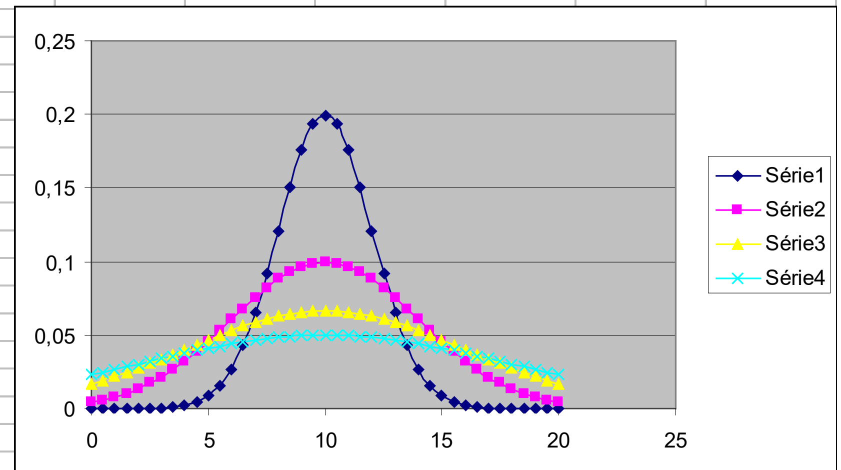
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

- La loi normale dépend de deux paramètres m (espérance mathématique) et σ (écart type)

$$X \to N(m, \sigma)$$

Loi Normale

10	ecart type			
	2	4	6	8
0	7,4336E-07	0,00438208	0,01657952	0,02283114
0,5	2,51475E-06	0,00594298	0,01898378	0,02463818
1	7,99187E-06	0,00793491	0,02158627	0,02648458
1,5	2,38593E-05	0,01043025	0,02437566	0,02835837
2	6,69151E-05	0,01349774	0,02733501	0,03024634
2,5	0,000176298	0,01719657	0,03044151	0,03213424
3	0,000436341	0,02156933	0,03366645	0,03400687
3,5	0,001014524	0,02663457	0,03697536	0,03584833
4	0,002215924	0,0323794	0,04032845	0,03764218
4,5	0,004546781	0,03875307	0,04368123	0,03937169
5	0,00876415	0,04566227	0,04698531	0,04102012
5,5	0,015869826	0,05296916	0,05018957	0,04257095
6	0,026995483	0,06049268	0,05324133	0,04400817
6,5	0,043138659	0,06801375	0,0560878	0,04531654
7	0,064758798	0,07528436	0,05867755	0,04648189
7,5	0,091324543	0,08204024	0,06096206	0,04749133
8	0,120985362	0,08801633	0,0628972	0,04833351
8,5	0,150568716	0,09296377	0,06444469	0,04899886
9	0,176032663	0,09666703	0,06557329	0,04947971
9,5	0,193334058	0,09895942	0,06625991	0,04977048
10	0,19947114	0,09973557	0,06649038	0,04986779
10,5	0,193334058	0,09895942	0,06625991	0,04977048
11	0,176032663	0,09666703	0,06557329	0,04947971
11,5	0,150568716	0,09296377	0,06444469	0,04899886
12	0,120985362	0,08801633	0,0628972	0,04833351
12,5	0,091324543	0,08204024	0,06096206	0,04749133
13	0,064758798	0,07528436	0,05867755	0,04648189
13,5	0,043138659	0,06801375	0,0560878	0,04531654
14	0,026995483	0,06049268	0,05324133	0,04400817
14,5	0,015869826	0,05296916	0,05018957	0,04257095
15	0,00876415	0,04566227	0,04698531	0,04102012
15,5	0,004546781	0,03875307	0,04368123	0,03937169
16	0,002215924	0,0323794	0,04032845	0,03764218
16,5	0,001014524	0,02663457	0,03697536	0,03584833
17	0,000436341	0,02156933	0,03366645	0,03400687
17,5	0,000176298	0,01719657	0,03044151	0,03213424
18	6,69151E-05	0,01349774	0,02733501	0,03024634
18,5	2,38593E-05	0,01043025	0,02437566	0,02835837
19	7,99187E-06	0,00793491	0,02158627	0,02648458
19,5	2,51475E-06	0,00594298	0,01898378	0,02463818
20	7,4336E-07	0,00438208	0,01657952	0,02283114



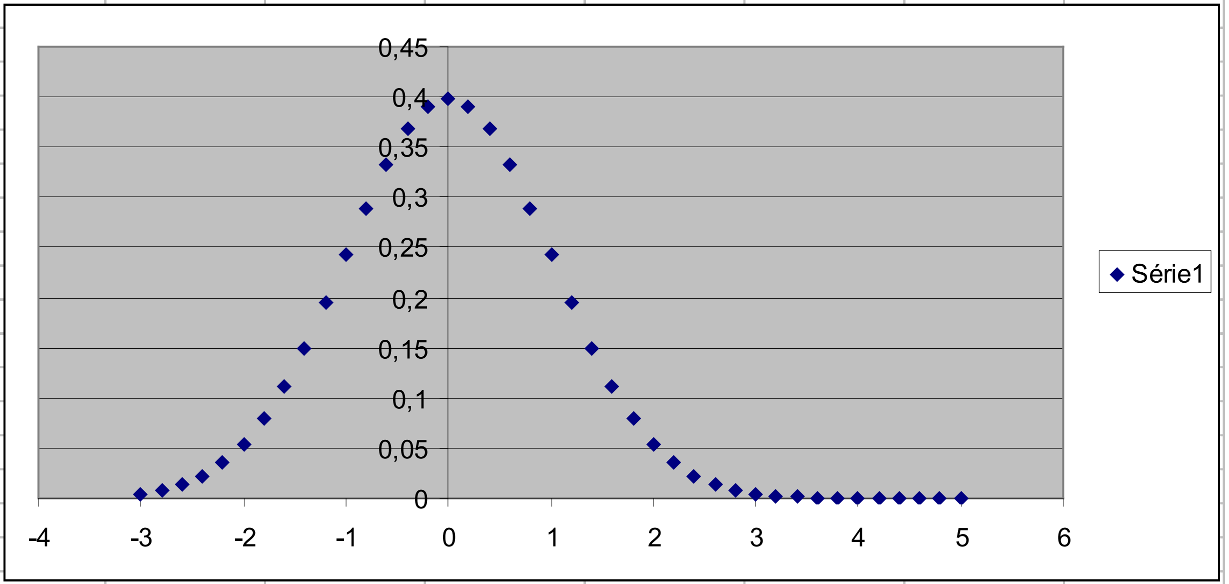
Loi Normale centrée réduite

- En faisant le changement de variable $t=(x-m)/\sigma$, on obtient une expression beaucoup plus simple de la loi normale, de paramètre $m=0$ et $\sigma = 1$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Loi Normale centrée réduite

Moyenne	
0	ecart type
	1
-3	0,00443185
-2,8	0,00791545
-2,6	0,01358297
-2,4	0,02239453
-2,2	0,03547459
-2	0,05399097
-1,8	0,07895016
-1,6	0,11092083
-1,4	0,14972747
-1,2	0,19418605
-1	0,24197072
-0,8	0,28969155
-0,6	0,3332246
-0,4	0,36827014
-0,2	0,39104269
0	0,39894228
0,2	0,39104269
0,4	0,36827014
0,6	0,3332246
0,8	0,28969155
1	0,24197072
1,2	0,19418605
1,4	0,14972747
1,6	0,11092083
1,8	0,07895016
2	0,05399097
2,2	0,03547459
2,4	0,02239453
2,6	0,01358297
2,8	0,00791545
3	0,00443185
3,2	0,00238409



Loi normale

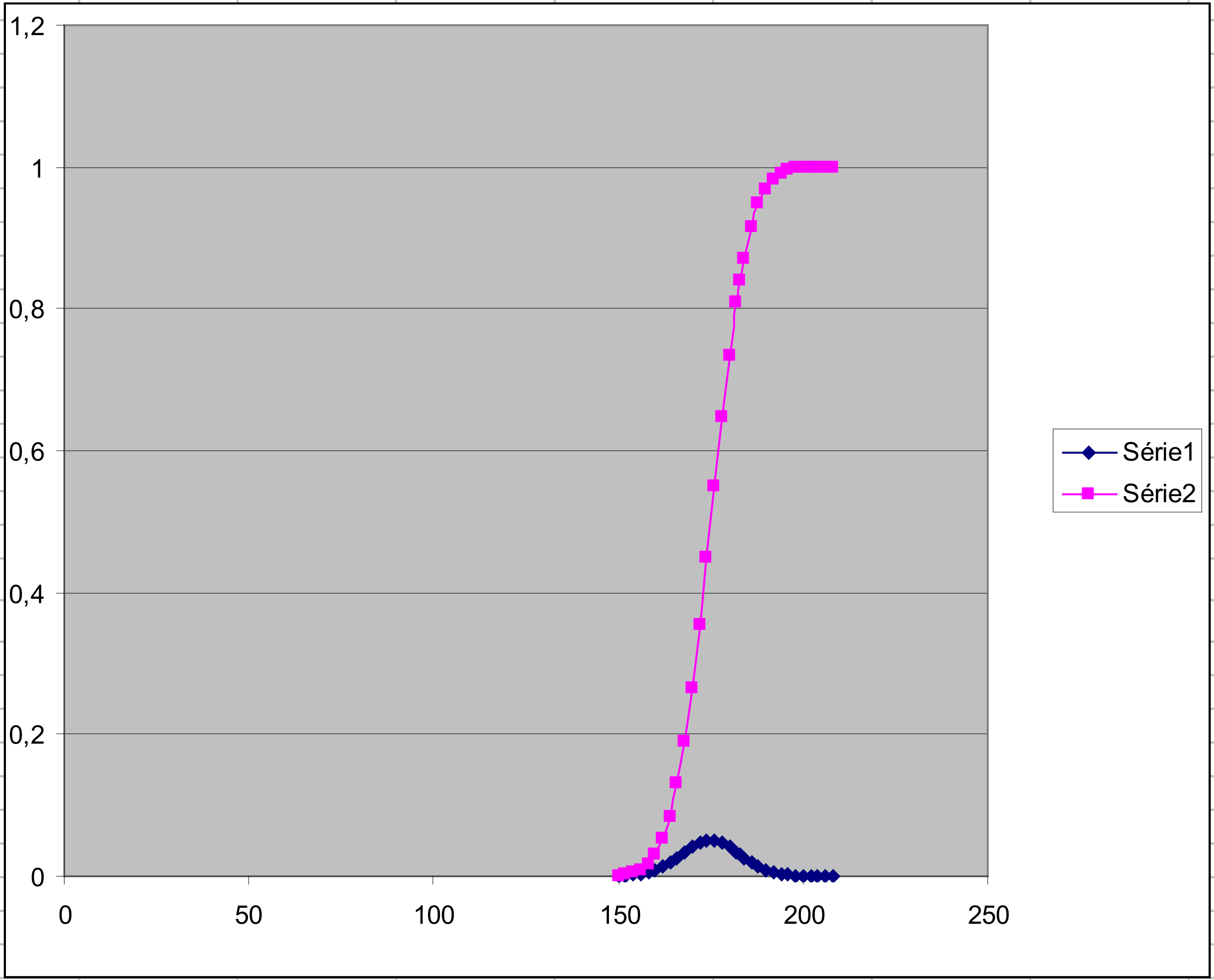
- La taille des étudiants se distribue selon une loi normale de moyenne égale à 175 cm et d'écart-type égal à 8 cm.
- Pourcentage des étudiants ayant une taille supérieure à 1,83 m

Loi normale

- La taille des étudiants du CPE se distribue selon une loi normale de moyenne égale à 175 cm et d'écart-type égal à 8 cm.
- Pourcentage des étudiants ayant une taille supérieure ou égale à 1,83 m
- P(X>=183) est donné par l'aire sous la courbe normale dont les paramètres sont m = 175 et s = 8 à droite de x=183

Loi normale

150	0,00037778	0,000889025
152	0,00079977	0,002020137
154	0,00159052	0,004332448
156	0,00297149	0,008774475
158	0,00521512	0,016793306
160	0,00859828	0,030396362
162	0,01331728	0,052081279
164	0,01937653	0,084565722
166	0,02648458	0,130294517
168	0,03400687	0,190786953
170	0,04102012	0,265985529
172	0,04648189	0,353830233
174	0,04947971	0,450261775
176	0,04947971	0,549738225
178	0,04648189	0,646169767
180	0,04102012	0,734014471
182	0,03400687	0,809213047
183	**0,03024634**	**0,841344746**
184	0,02648458	0,869705483
186	0,01937653	0,915434278
188	0,01331728	0,947918721
190	0,00859828	0,969603638
192	0,00521512	0,983206694
194	0,00297149	0,991225525
196	0,00159052	0,995667552
198	0,00079977	0,997979863
200	0,00037778	0,999110975
202	0,00016764	0,999630922
204	6,9883E-05	0,999855519
206	2,7366E-05	0,999946688
208	1,0068E-05	0,999981463



P(X>183) **0,1587**

Loi normale

- La taille des étudiants du CPE se distribue selon une loi normale de moyenne égale à 175 cm et d'écart-type égal à 8 cm.
- Pourcentage des étudiants ayant une taille supérieure ou égale à 1,83 m
- P(X>138) est aussi égale à l'aire sous la courbe normale, centrée, réduite, à droite du point z qui correspond à la valeur 1

$$t = \frac{183 - 175}{8} = 1$$

- La table Π(t) donne P(X<1)=0,8413
- P(X>=1)=1 - 0,8413 = 0,1587

Loi normale

- Probabilité pour que la taille soit < 1,83 = 0,8413
- Probabilité pour que la taille soit comprise entre 1,78 m et 1,83 ?
- La valeur de la variable normale centrée réduite pour 1,78

$$z = \frac{178 - 175}{8} = 0,375$$

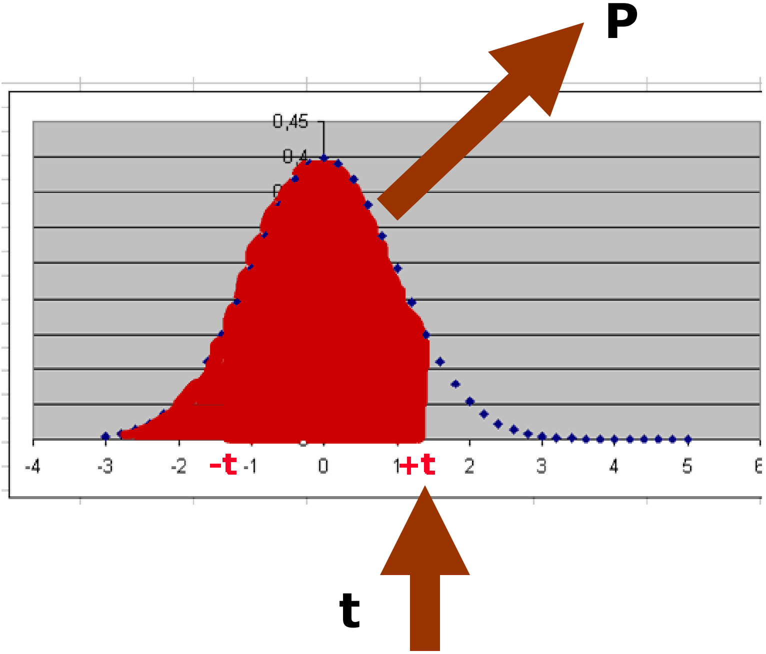
- P(1,78 <= X < 1,83) = $\Pi(1)$ - $\Pi(0,375)$ = 0,8413 - 0,646
- P = 0,195

Loi normale

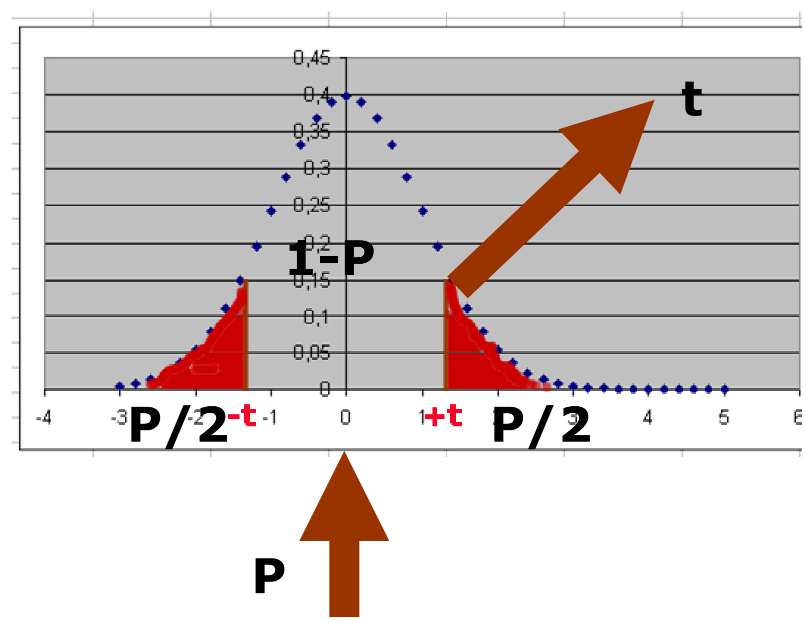
- La table P(t) a été établie pour permettre de déterminer **l'intervalle de confiance** associé à une estimation sur un échantillon.
- Elle donne les valeurs de t telles qu'il y ait une probabilité P pour que t se trouve dans l'intervalle (-tlim, +tlim)

Loi normale

t : variable normale centrée réduite → **Π(t)** → P (t) Probabilité



P (t) Probabilité → **P(t)** → t : variable normale centrée réduite



Loi normale

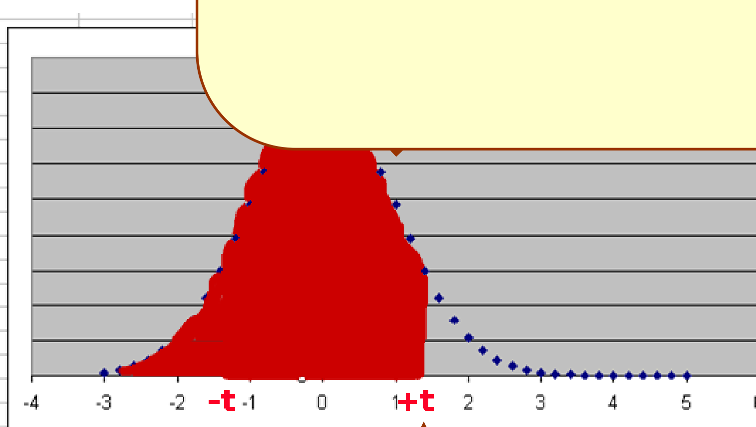
t : variable normale centrée réduite

Attention : la logique de détermination de P n'est pas symétrique

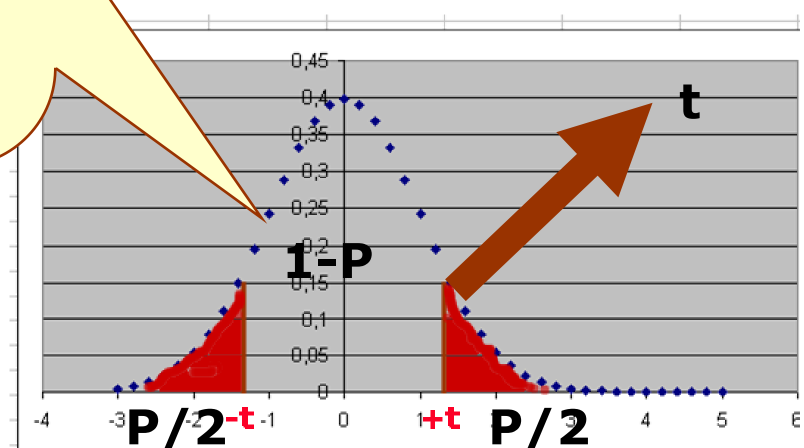
P (t) Probabilité

P(t)

t : variable normale centrée réduite



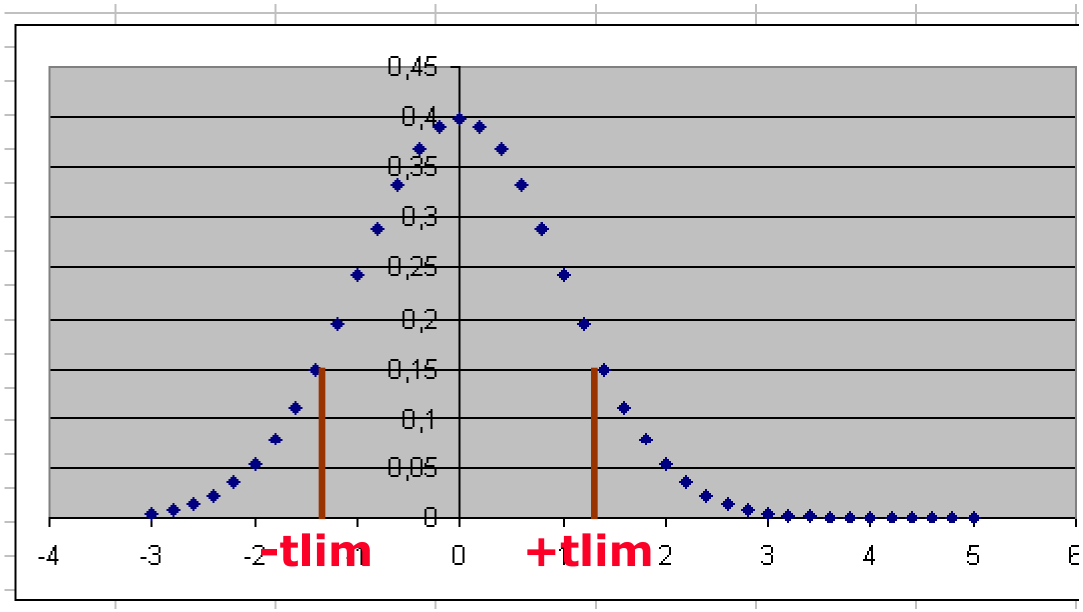
t



P

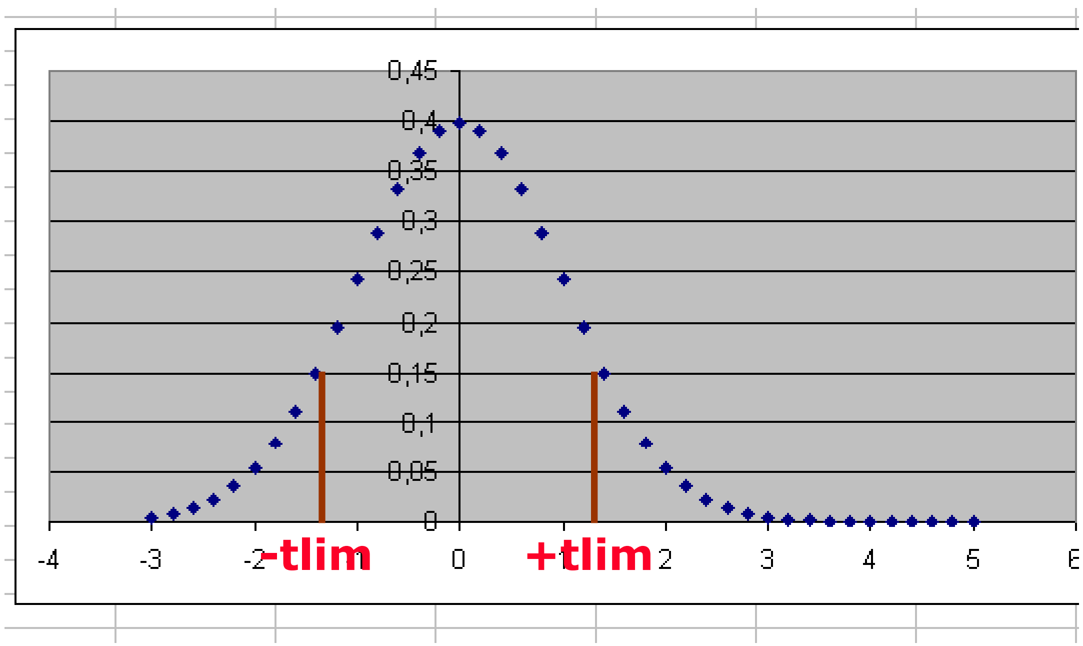
Loi normale

- Déterminer l'intervalle (-tlim,+tlim) tel que la probabilité que t se trouve à l'intérieur de cet intervalle soit égale à 99%
-



Loi normale

- Déterminer l'intervalle (-tlim,+tlim) tel que t se trouve à l'intérieur de cet intervalle soit égale à 99%
- P(-tlim<=t<+tlim) = 1 - P(t) = 0,99



- **P(t) = 0,01 = > t=2,5758**

Loi normale

- Déterminer la valeur de t telle que
- $P(t<tlim) = 95\%$

Loi normale

- Déterminer la valeur de t telle que
- P(t<tlim) = 95%
- P/2 + (1-P) = 0,95
- P/2 - 2P/2 = 0,95 - 1
- P/2 = 0,05
- P = 0,1 ==> t = 1,6449

Approximation Loi binomiale / Loi normale

- X = B(n;p)
- n -> OO
- P # 0 et q # 1 OU P # 1 et q # 0

- m = n . p
- $\sigma = \sqrt{npq}$

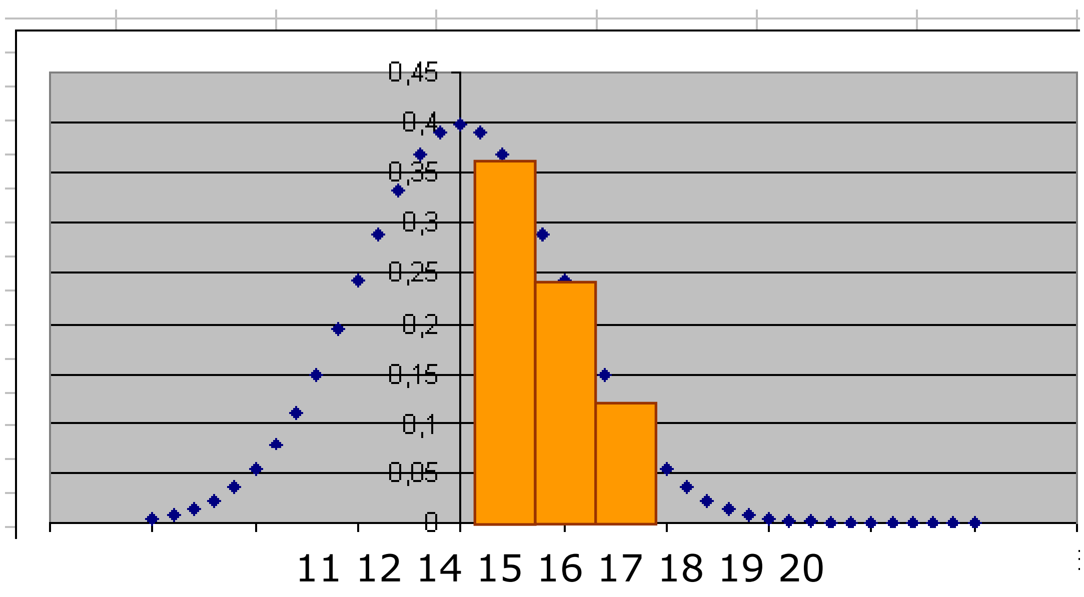
- L'approximation est acceptable dès que npq>9

Approximation Loi binomiale / Loi normale

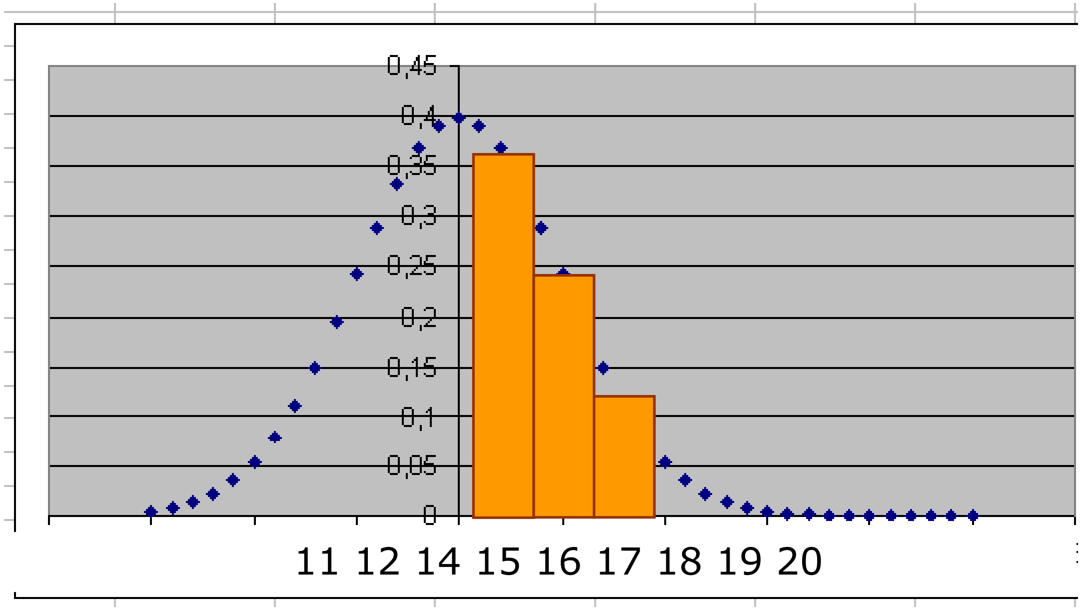
- On tire avec remise un échantillon de taille $n=50$ dans une population contenant une proportion $p = 0,3$ de personnes possédant le caractère "joue au loto"
- Soit X le nombre d'individus présentant ce caractère dans l'échantillon
- Probabilité $P(15<=X<18)$

Approximation Loi binomiale / Loi normale

- On tire avec remise un échantillon de taille n=50 dans une population contenant une proportion p = 0,3 de personnes possédant le caractère "joue au loto"
- Soit X le nombre d'individus présentant ce caractère dans l'échantillon
- Probabilité P(15<=X<18)
- =P(15<=X<=17) = P(15)+P(16)+P(17) = 0,3354



Approximation Loi binomiale / Loi normale



- P(15)+P(16)+P(17) = F(17+1/2) - F(15-1/2)
- =F(17,5) - F(14 ,5)
- = Π(0,77) - Π(-0,15)
- = Π(0,77) - (1-Π(0,15))
- =
- =0,7794-0,4404 = 0,3390

Loi moyenne gros échantillon

- La moyenne $\bar{X}$ d'un gros échantillon de taille n, tiré avec remise dans une population de moyenne m et d'écart type σ suit approximativement, quelle que soit la loi de distribution de X dans la population, suit une loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma\sqrt{n}$