Logarithme

Le **logarithme** de base *b* d'un nombre réel positif est la puissance à laquelle il faut élever la base *b* pour obtenir ce nombre. Par exemple, le logarithme de mille en base dix est 3, car $1000 = 10^3$.

Le logarithme de *x* en base *b* est noté $\log_b(x)$. Ainsi $\log_{10}(1000) = 3$.

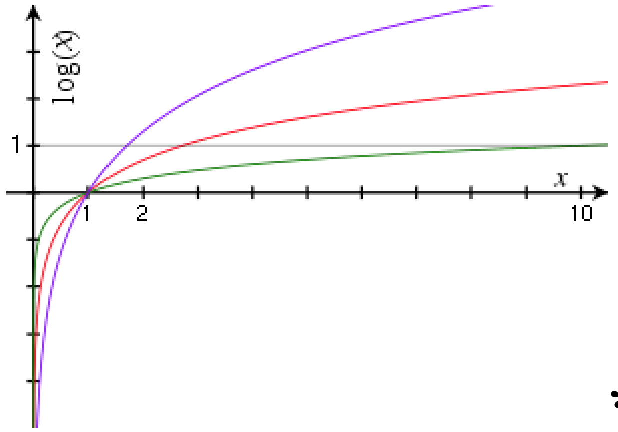
Tout logarithme transforme un produit en somme :

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

DEMO :

et une puissance en produit :

$$\log_b(x^p) = p\log_b x.$$



*

Fonctions logarithmes : en rouge la fonction logarithme de base e, en vert celle de base 10 et en violet celle de base 1,7.

Logarithme naturel

Le **logarithme naturel** ou **logarithme népérien** est, en mathématiques, la fonction logarithme de base e, c'est-à-dire que le logarithme naturel de *x* est la puissance à laquelle il faut élever *e* pour trouver *x*. On peut en effet définir cette fonction comme la primitive sur]0,+∞[et qui s'annule en 1 de la fonction inverse, et en déduire que sa bijection réciproque est la fonction exponentielle.

Étude de la fonction

- La fonction logarithme naturel est définie et dérivable (donc continue) sur]0,+∞[et pour tout réel *x* strictement positif,

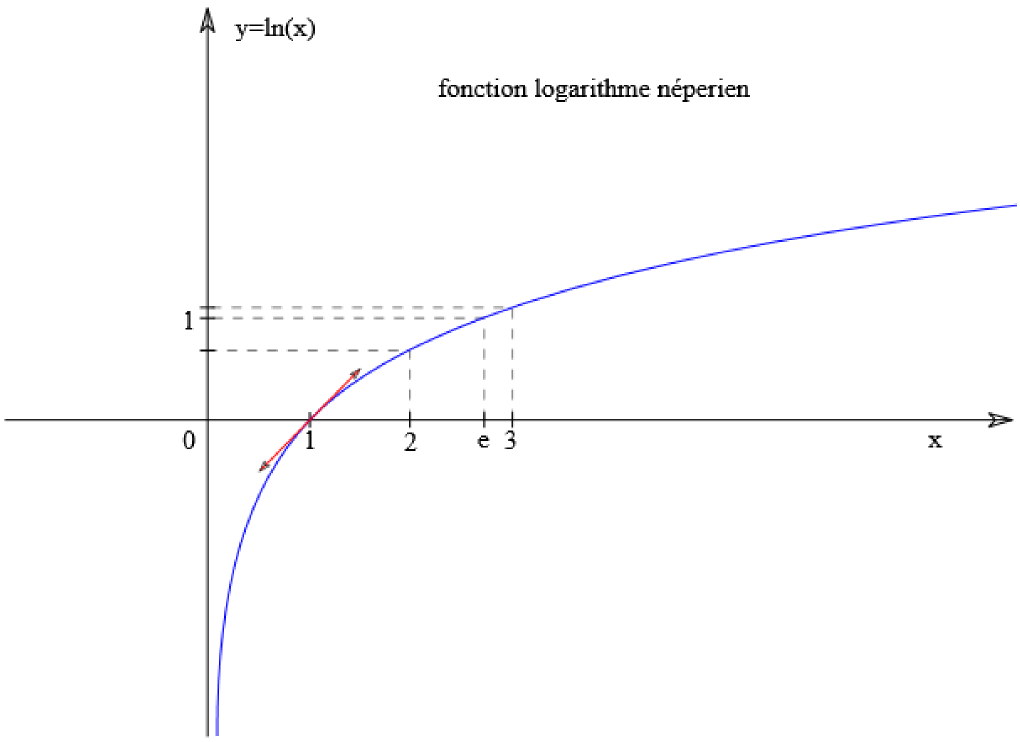
$$\ln' x = \frac{1}{x}.$$

- Puisque sa dérivée est strictement positive, on en déduit que le logarithme naturel est strictement croissant.
- Les limites de la fonction aux bornes de son intervalle de définition sont :

$$\lim_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

  C'est donc une bijection de]0,+∞[sur $\mathbb{R}$.
- Son nombre dérivé au point 1 (qui donne la pente de la tangente au graphe au point de coordonnées (1,0)) est :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$



Le nombre e

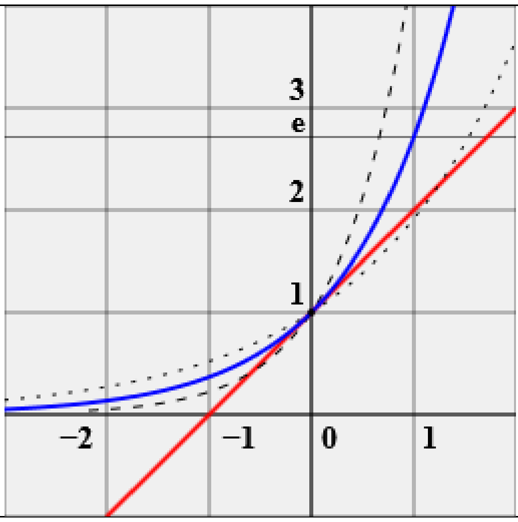
Le nombre **e** est une constante mathématique environ égale à 2,71828. Elle est la base du logarithme naturel

e peut être défini de plusieurs façons différentes, chaque définition donnant bien sûr le même résultat :

- **e** est le réel tel que $\ln(e) = 1$ lorsqu'on définit la fonction $\ln$ comme la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. C'est pourquoi cette constante est aussi appelée la **base des logarithmes naturels**
-
- **e** est le réel tel que $\exp(1) = e$ lorsqu'on définit la fonction $\exp$ comme l'unique fonction vérifiant $u' = u$ et $u(0) = 1$.
- **e** est la limite de la suite $(1 + \frac{1}{n})^n$ (quand n tend vers l'infini).
- **e** est égal à la somme de la série infinie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ (avec la convention $0! = 1$).

L'équivalence de ces quatre définitions provient des relations qui lient la fonction exponentielle, la fonction logarithme et les limites de suites.

e est le seul nombre réel tel que la valeur de la dérivée (pente de la tangente) de la fonction $f(x) = e^x$ au point $x = 0$ est égale à 1. La fonction e^x ainsi définie est la fameuse fonction exponentielle, et sa réciproque est le logarithme naturel. Le logarithme naturel d'un nombre positif k peut aussi être directement défini comme l'aire sous la courbe $y = 1/x$, entre $x = 1$ et $x = k$. Dans ce cas, e est le nombre dont le logarithme naturel vaut 1. Il y a encore d'autres caractérisations.



e est le seul nombre *a* tel que la dérivée de la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ (courbe bleue) au point $x = 0$ soit égale à 1. À titre de comparaison, les fonctions 2^x (courbe faite de points) et 4^x (courbe faite de petits traits) sont tracées ; elles ne sont pas tangentes à la droite de pente 1 (en rouge).