Module 34

MATHEMATIQUES

C04 - PROBABILITES – STATISTIQUES No 4

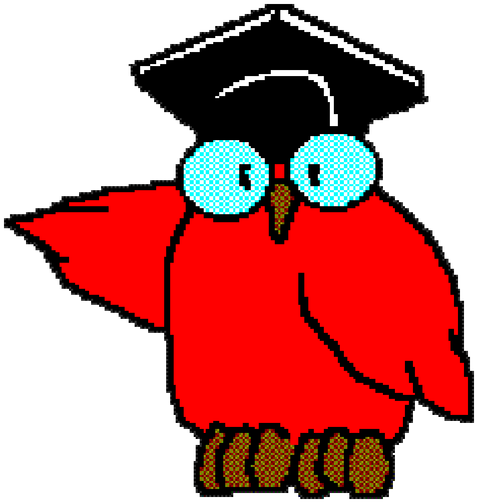
PROBABILITES COMPOSEES ET THEOREME DE BAYES

Objectifs

- Comprendre les probabilités composées et les règles d'application des théorèmes de Bayes.
- S'approprier l'ensemble des principes du calcul des probabilités grâce à des exercices de synthèse.

Plan

- Probabilités conditionnelles
- Probabilités composées
- Théorème de Bayes
- Exercices de synthèse



PROBABILITES CONDITIONNELLES.

On appelle **probabilité conditionnelle** d'un évènement B **dépendant** d'un évènement A la probabilité de B sachant que A est réalisé.

Cette probabilité se note Probabilité(B/A) et s'énonce Probabilité de B si A.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Pour décomposer une probabilité conditionnelle (probabilité de doubler votre capital si vous spéculez en bourse) il faut mettre au numérateur l'intersection des 2 évènements constituant la condition (Spéculer en bourse ET doubler le capital) et au numérateur la probabilité de l'événement de référence (spéculer en bourse).

Exemples d'applications

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes.

Désignons par B l'évènement "Tirer un roi" et par A l'évènement "tirer un roi ou un coeur".

On a :

$P(A \cap B) = P(B) = 4/52 = 1/13$

$P(A)$ = 12 (coeurs sauf roi) + 3 (rois sauf roi coeur) + 1 (roi de coeur)/52 = 16/52 = 4/13

La probabilité d'avoir tiré un roi, sachant que l'on a tiré un roi ou un coeur :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(\text{un roi}/\text{un roi ou un coeur}) = \frac{P(\text{un roi})}{P(\text{un roi ou un coeur})} = \frac{1/13}{4/13} = \frac{1}{4}$$

PROBABILITES COMPOSEES

La **formule des probabilités composées** résulte du concept de probabilité conditionnelle.

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(B/A) * P(A)}$$

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A/B) * P(B)}$$

Lorsqu'un événement aléatoire AB résulte de la réalisation simultanée de deux évènements aléatoires A et B, la probabilité de réalisation de l'évènement AB considéré est égale à la probabilité de réalisation de l'un des évènements composants, multipliée par la probabilité de réalisation de l'autre sachant que le premier s'est effectivement réalisé.

PROBABILITES COMPOSEES : ILLUSTRATION

Une digue vient d'être construite sur une rivière. Elle est capable de résister à des crues tant que le débit reste inférieur à 10^9 m^3 par seconde.

Au delà elle a une chance sur deux de rompre;

Une société souhaite aménager les terres protégées par la digue à condition que la probabilité de rupture dans les 30 prochaines années soit inférieure à 0,01.

Les statistiques ont pu établir que l'occurrence du débit critique dans les 30 dernières années a été de 0,014.

Décision ?

PROBABILITES COMPOSEES : ILLUSTRATION

Une digue vient d'être construite sur une rivière. Elle est capable de résister à des crues tant que le débit reste inférieur à 10^9 m^3 par seconde.

Au delà elle a une chance sur deux de rompre;

Une société souhaite aménager les terres protégées par la digue à condition que la probabilité de rupture dans les 30 prochaines années soit inférieure à 0,01.

Les statistiques ont pu établir que la probabilité du débit critique dans les 30 dernières années a été de 0,014.

Décision ?

P(A) rupture digue

P(B) crue critique = 0,14

P(A/B) = 0,5 (probabilité de rupture sachant que le niveau critique est atteint)

P(B/A) = 1 (Si la digue cède, c'est qu'il y a crue)

P(AB)= P(B) P(B/A) = 0,14 . 0,5

P(AB) = P(A) P(A/B) = P(A)

P(A) = 0,014 . 0,5 = 0,007 < 0,01 => Décision favorable

EVENEMENTS INDEPENDANTS

Nous avions défini que deux évènements sont **indépendants** si le fait que l'évènement A soit réalisé ne donne aucune connaissance sur l'évènement B. Dans le cas inverse ils sont **dépendants** .

Si deux évènements A et B sont indépendants l'un de l'autre :

$$P(A/B) = P(A)$$

$$P(B/A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Illustration

- **Synthèse sur dénombrement, indépendance, exclusion, probabilités composées et totales**
- **Soit un lampadaire de 3 ampoules**
- **Chaque ampoule a 1 chance sur 2 d'être en panne au bout de 1000 heures**
- **Probabilité pour qu'au bout de 1000 heures, 2 soient en panne**

Synthèse

Probabilité d'avoir A OU B	**Théorème des probabilités totales**	**Si évènements mutuellement exclusifs**	**P(A ou B) = P(A) + P(B)**
Probabilité d'avoir A ET B	**Théorème des probabilités composées**	**Si évènements indépendants**	**P(A et B) = P(A) * P(B)**

Illustration

On tire 3 cartes sans remise dans un jeu de 52 cartes.
Quelle est la probabilité d'obtenir 3 as ?

Illustration

On tire 3 cartes sans remise dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 as ?

Désignons par A1, A2 et A3 les ensembles de tirages de 3 cartes dans lesquels figurent respectivement un as au premier, au second et au troisième tirage.

Selon la formule des probabilités composées généralisée :

$P(A1 \cap A2 \cap A3) = P(A1) * P(A2/A1) * P(A3/A2 \cap A1)$

Soit :

Probabilité de tirer un as sur un jeu de 52 cartes qui en comporte 4.

Probabilité de tirer un as lorsqu'on vient de tirer un as (soit probabilité de tirer un as sur un jeu de 51 cartes qui en comporte 3)

Probabilité de tirer un as lorsqu'on vient de tirer un as ET un as (soit probabilité de tirer un as sur un jeu de 50 cartes qui en comporte 2)

$$= \frac{4}{52} * \frac{3}{51} * \frac{2}{50} = \frac{1}{5\,525}$$

Problème #4

Soit A et B des évènements tels que

p(A) = 1/3 , P(B) = 1/4, P(A et B) = 1/6

Calculer

P(A ou B)

P(A/B) Probabilité de A quand B est réalisé

P(B/A) Probabilité de B quand A est réalisé

Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Problème #4

Soit A et B des évènements tels que

$p(A) = 1/3$, $P(B) = 1/4$, $P(A \text{ et } B) = 1/6$

Calculer

$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ et } B)$

$= 1/3 + 1/4 - 1/6 = 5/12$

$P(A/B) = P(A \text{ et } B) / P(B) = (1/6) / (1/4) = 2/3$

$P(B/A) = P(A \text{ et } B) / P(A) = (1/6) / (1/3) = 1/2$

Les évènements A et B ne sont pas indépendants car $p(A) * p(B)$ est différent de $p(A \text{ et } B)$

Etude d'un cas

Imaginons qu'une urne contienne deux boules rouges.

Une deuxième urne d'apparence identique contient une boule rouge et une boule blanche.

Une urne est choisie au hasard et on tire une boule. Quelle est le probabilité que la première urne soit choisie, si la boule tirée est rouge ?

B est l'évènement "Tirer la première urne". Son complément est choisir de le seconde urne.

A est l'évènement "Tirer une boule rouge" Son complément Ã est de choisir une boule blanche.

Le problème consiste à déterminer la probabilité conditionnelle P(B/A) (Choix première urne B SI la boule tirée est rouge A)

Le théorème des probabilités composées donne :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Etude d'un cas

On a :

$P(A \cap B) = P(B) * P(A/B)$

La probabilité de choix de la première urne $P(B) = 0,5$

Une fois celle-ci choisie, on est sûr d'avoir une boule rouge :

$P(A/B) = 1$

$P(A \cap B) = 0,5 * 1 = 0,5$

Premier théorème de Bayes

L'exemple du paragraphe précédent est typique des problèmes ou on examine le résultat d'une expérience et où on se demande ensuite quelle est la probabilité que le résultat soit effectivement dû à une des causes possibles.

Dans l'exemple, deux causes possibles pour avoir une boule rouge, soit avoir la première urne (qui ne contient que des boules rouges), soit tirer une des boules rouges de la seconde urne.

Nous avons obtenu le résultat en appliquant les théorèmes des probabilités, mais par un processus un peu long.

Le Théorème de Bayes a pour objectif d'aller directement au résultat.

PREMIER THEOREME DE BAYES

Le **premier théorème de Bayes** a pour objet d'exprimer P(B/A) en fonction de P(A/B).

$$\mathbf{P(B/A) = \frac{P(A/B) * P(B)}{P(A)}}$$

On le démontre en éliminant $P(A \cap B)$ entre les expressions de probabilités conditionnelles.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A/B) * P(B)}{P(A)}$$

SECOND THEOREME DE BAYES

Le **second théorème de Bayes est** une généralisation du premier

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i) * P(B_i)}{\Sigma_k \; P(A/B_k) * P(B_k)}$$

Par définition des probabilités conditionnelles, on peut écrire :

$P(A \cap Bi) = P(A/Bi) * P(Bi)$

Par ailleurs, les Bk formant une partition de l'ensemble fondamental, le théorème des probabilités totales devient :

$P(A) = \Sigma k \; P(A/Bk) * P(Bk)$

Illustration

Une entreprise de sous-traitance possède 3 machines M1, M2 et M3.

La production pour l'année :

Machine	Production	Taux rejets
M1	240	10%
M2	300	5%
M3	660	1%

Quelle est la probabilité pour qu'un lot, dans lequel on a tiré une pièce défectueuse, provienne de la machine M1 ?

Illustration

Une entreprise de sous-traitance possède 3 machines M1, M2 et M3.

La production pour l'année :

Machine	Production	Taux rejets
M1	240	10%
M2	300	5%
M3	660	1%

Quelle est la probabilité pour qu'un lot, dans lequel on a tiré une pièce défectueuse, provienne de la machine M1 ?

Probabilité pour qu'une pièce tirée au hasard vienne de M1 : P(M1) = 240/1200 = 0,20, de M2 : P(M2) = 300/1200 = 0,25, de M3 : P(M3) = 660/1200 = 0,55

Si l'on fait intervenir l'événement D, à savoir "pièce défectueuse", les probabilités deviennent :

P(D/M1) = Probabilité qu'une pièce venant de M1 soit défectueuse = 0,1

De la même manière, P(D/M2) = 0,05 et P(D/M3) = 0,01

Illustration

L'application du second théorème de Bayes

$$p(M1/D) = \frac{P(D/M1)*P(M1)}{P(D/M1)*P(M1) + P(D/M2)*P(M2) + P(D/M3)*P(M3)}$$

$$p(M1/D) = \frac{0,1*0,2}{0,1*0,2 + 0,05*0,25 + 0,01*0,55} = 0,526$$

On obtiendrait de même :
P(M2/D) = 0,329 et P(M3/D) = 0,145

Exercice

On fabrique un objet p indifféremment à partir de 3 machines A, B et C.

Machine	% Production	Taux rejets
A	60%	1%
B	30%	2%
C	10%	5%

Une pièce B est rejetée. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de A ?

Probabilité pour qu'une pièce tirée au hasard vienne de A : P(A) = 0,6, de B : P(B) = 0,3, de C : P(C) = 0,1

Si l'on fait intervenir l'événement D, à savoir "pièce défectueuse", les probabilités deviennent :

P(D/A) = Probabilité qu'une pièce venant de A soit défectueuse = 0,01

De la même manière, P(D/B) = 0,02 et P(D/C) = 0,05

Exercice

L'application du second théorème de Bayes

$$p(A/D) = \frac{P(D/A)*P(A)}{P(D/A)*P(A) + P(D/B)*P(B) + P(D/C)*P(C)}$$

$$p(A/D) = \frac{0,6*0,01}{0,6*0,01 + 0,3*0,02 + 0,1*0,05} = 0,35$$

Exercice

On fabrique un objet p indifféremment à partir de 3 machines A, B et C.

Machine	% Production	Taux rejets
A	60%	1%
B	30%	2%
C	10%	5%

Une pièce B est rejetée. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de A ?

Exercices de synthèse No 1

Lors d'un audit comptable, on extrait au hasard 30 pièces Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux de ces pièces ait été émises le même jour (On considère 220 jours ouvrables).

Toutes les dates sont équiprobables

Exercices de synthèse No 1

Lors d'un audit comptable, on extrait au hasard 30 pièces. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux de ces pièces ait été émises le même jour (On considère 220 jours ouvrables).

Toutes les dates sont équiprobables

La mention "au moins" nous indique de recourir à la probabilité de l'événement complémentaire.

C'est à dire qu'on s'intéresse à la probabilité qu'il n'y ait aucune coïncidence des dates d'émission dans un groupe de n pièces.

Le nombre total de cas possibles est 220 à la puissance n noté 220^n.

Le nombre de cas favorables est le nombre de choix ordonnés de n dates parmi 220, soit: 220! / (220-n)!

Donc, la probabilité qu'il n'y ait aucune coïncidence de dates d'émission est :

220! / ((220-n)! * 220^n) = produit[(220 - i)/220 , pour i=0 à n-1] = produit[1 - i/220 , pour i=0 à n-1]

La probabilité P(n) qu'il y ait au moins une coïncidence est donc : P(n) = 1 - produit[1 - i/220 , pour i=0 à n-1]. Il suffit ensuite de calculer P(30).

Exercices de synthèse No 1

La difficulté vient du fait que les termes de la formule excèdent les capacités de calcul des tableurs et des calculettes.

Il faut donc réfléchir un peu pour organiser le calcul, en tenant compte des limites et des possibilités des outils..

Si on dispose d'une calculatrice programmable, il est possible de programmer, avec une boucle, le calcul de l'expression :

produit[1 - i/220 , pour i=0 à n-1].

Cette programmation dépend de la calculatrice et du langage utilisés.

Si l'on dispose d'un tableur, l'expression : produit[1 - i/220 , pour i=0 à n-1] est facile à calculer en faisant un tableau de taille n, avec 3 colonnes : une colonne pour i, une colonne pour 1 - i/220, une colonne pour le produit et une colonne pour le résultat final.

Exercices de synthèse No 1

Le tableau donne donc une probabilité de 0,87

n	i	1-i/220	Produit	Proba
1	0	1	1	
2	1	0,99545455	0,99545455	0,00454545
3	2	0,99090909	0,98640496	0,01359504
4	3	0,98636364	0,97295398	0,02704602
5	4	0,98181818	0,95526391	0,04473609
6	5	0,97727273	0,93355337	0,06644663
7	6	0,97272727	0,90809282	0,09190718
8	7	0,96818182	0,87919896	0,12080104
9	8	0,96363636	0,84722809	0,15277191
10	9	0,95909091	0,81256876	0,18743124
11	10	0,95454545	0,77563381	0,22436619
12	11	0,95	0,73685212	0,26314788
13	12	0,94545455	0,69666019	0,30333981
14	13	0,94090909	0,6554939	0,3445061
15	14	0,93636364	0,61378066	0,38621934
16	15	0,93181818	0,57193197	0,42806803
17	16	0,92727273	0,53033692	0,46966308
18	17	0,92272727	0,48935634	0,51064366
19	18	0,91818182	0,4493181	0,5506819
20	19	0,91363636	0,41051335	0,58948665
21	20	0,90909091	0,37319396	0,62680604
22	21	0,90454545	0,3375709	0,6624291
23	22	0,9	0,30381381	0,69618619
24	23	0,89545455	0,27205145	0,72794855
25	24	0,89090909	0,24237311	0,75762689
26	25	0,93150685	0,22577222	0,77422778
27	26	0,88181818	0,19909004	0,80090996
28	27	0,87727273	0,17465627	0,82534373
29	28	0,87272727	0,15242729	0,84757271
30	29	0,86818182	0,1323346	0,8676654

Exercices de synthèse No 2

La probabilité d'être de sexe masculin est de 0,5.

La probabilité qu'un individu de sexe quelconque soit du groupe sanguin A est de 0,40

Quelle est la probabilité pour un individu d'être une femme de groupe sanguin A ?

Quelle est la probabilité qu'un individu de groupe sanguin A soit de sexe masculin ?

Exercices de synthèse No 2

La probabilité d'être de sexe masculin est de 0,5.

La probabilité qu'un individu de sexe quelconque soit du groupe sanguin A est de 0,40

Quelle est la probabilité pour un individu d'être une femme de groupe sanguin A ?

P = 0,20

Quelle est la probabilité qu'un individu de groupe sanguin A soit de sexe masculin ?

P=0,50