



Mathématiques

Module 22

Perspective centrale



- Comprendre la perspective centrale



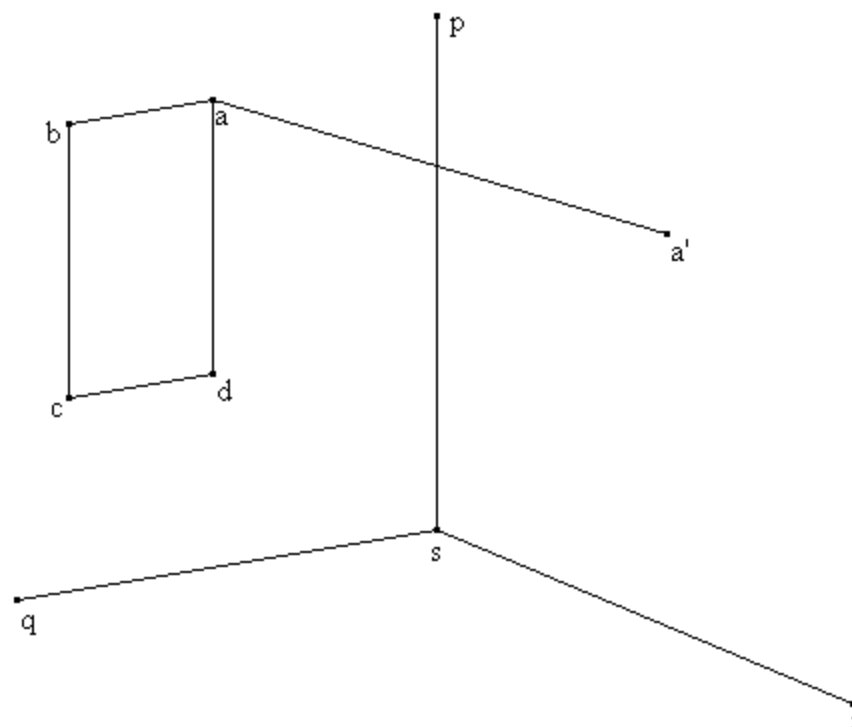
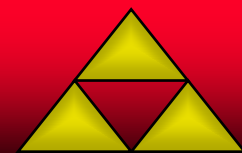


- Perspective parallèle
- L'ombre au flambeau
- La fenêtre de Dürer
- Image de droites parallèles : point de fuite
- Images de droites coplanaires : lignes de fuite



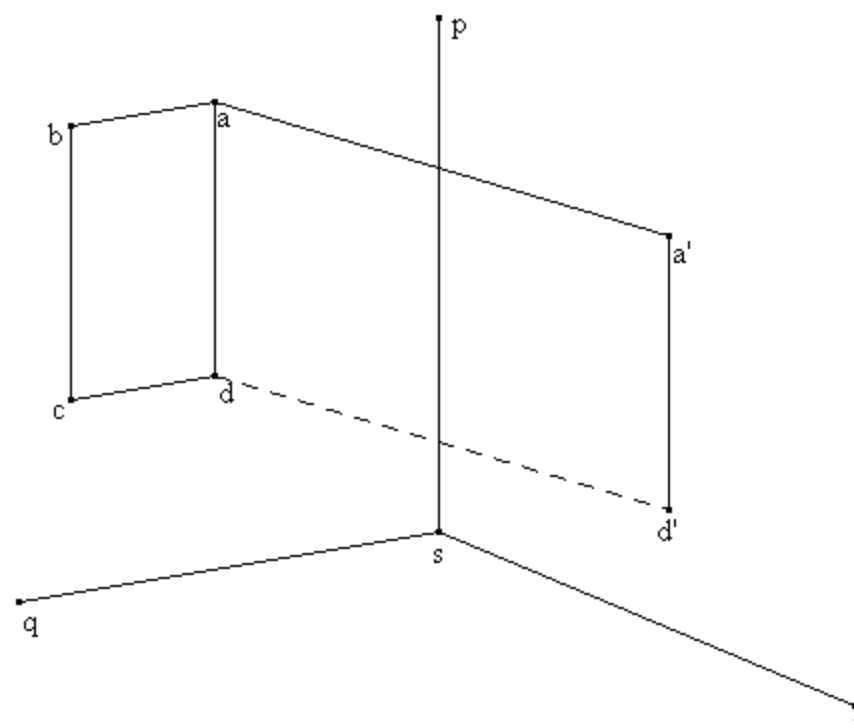


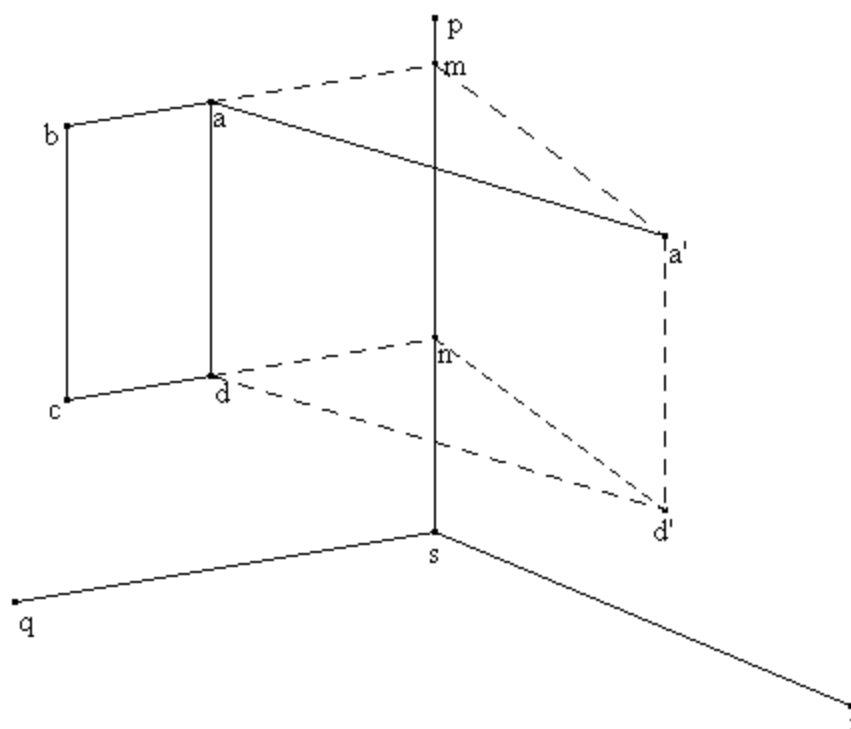
**On choisira un jour de grand soleil pour
introduire cette notion...et on
observera l'ombre au soleil portée sur
un plan.**



Perspective centrale

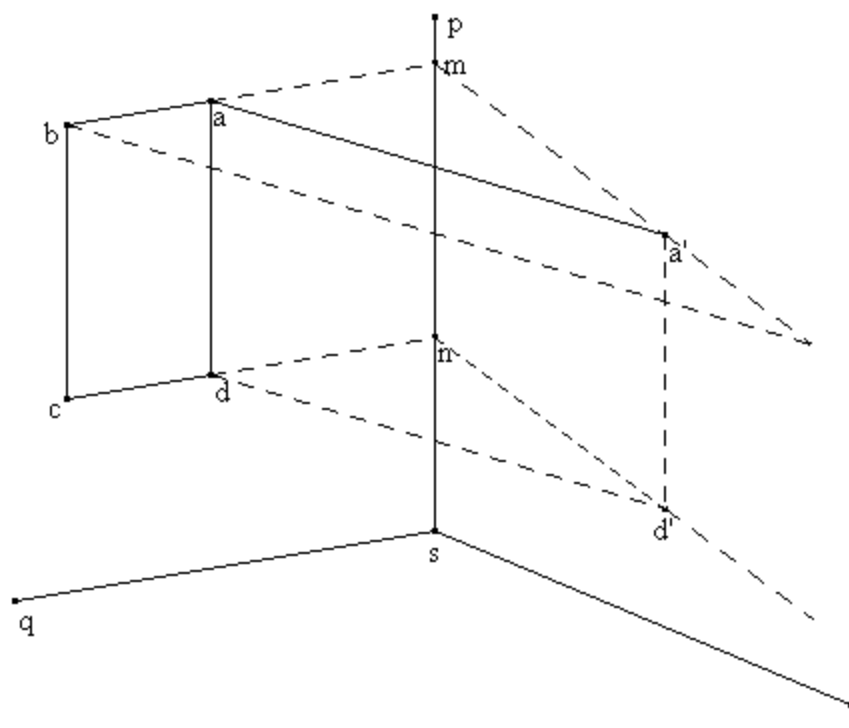
Perspective parallèle





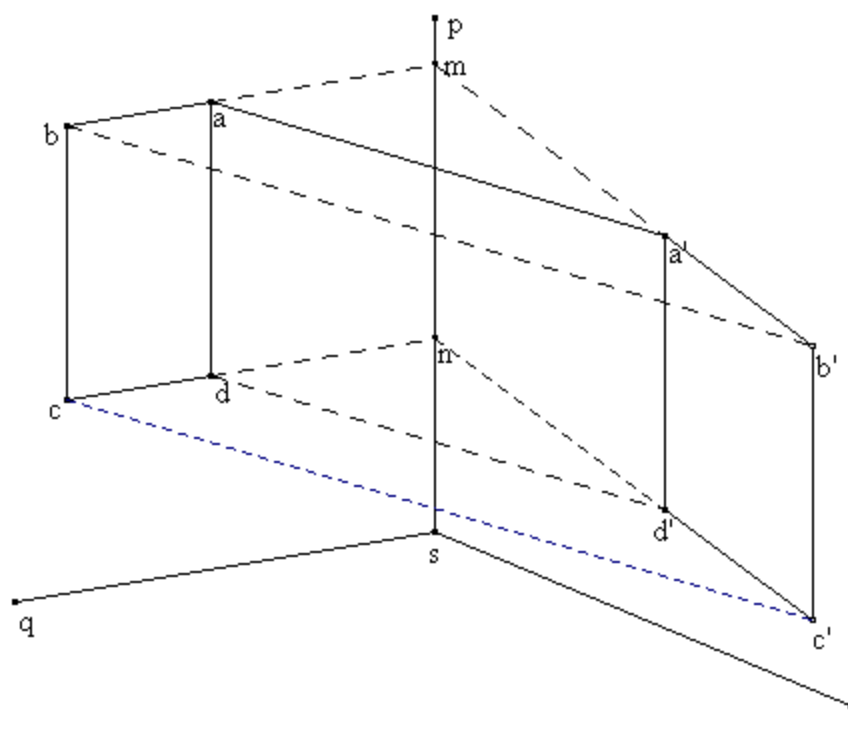
Perspective centrale

Perspective parallèle



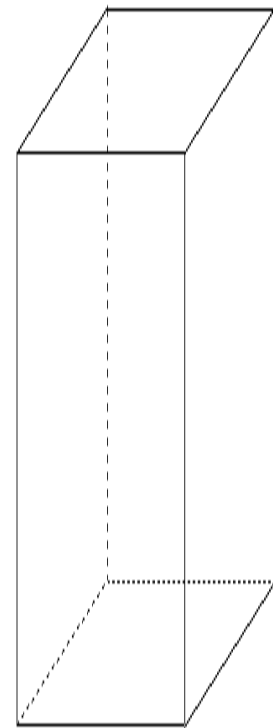
Perspective centrale

Perspective parallèle



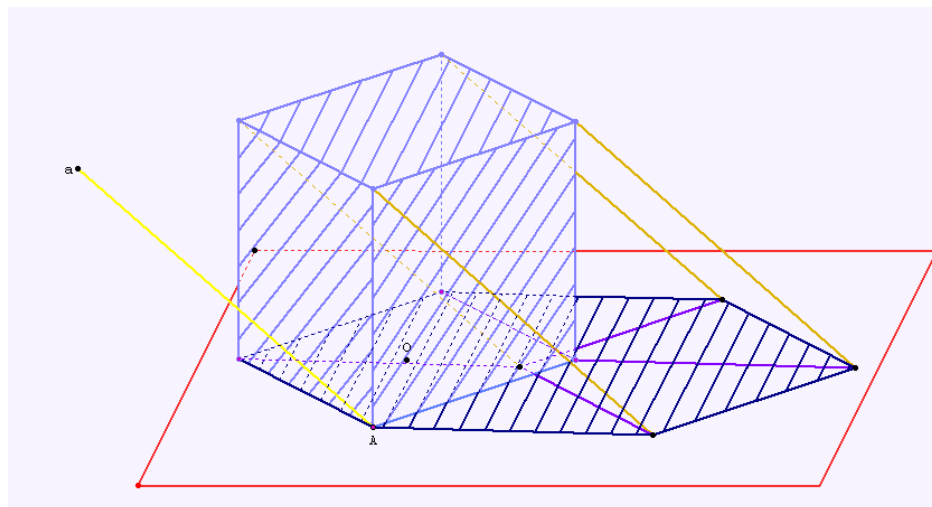


- La perspective cavalière n'est alors qu'un cas particulier de la perspective parallèle.
- La figure est dessinée sur un plan situé face à l'utilisateur
- Les figures planes situées sur des plans parallèles à celui-ci (plans frontaux) sont dessinés sans déformation (un rectangle reste un rectangle)

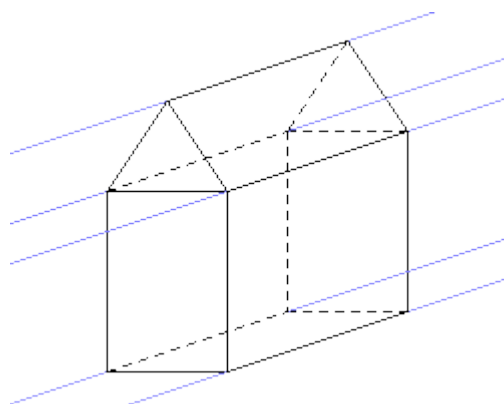




- **Perspective parallèle** : modélisation géométrique de l'ombre portée par le soleil (supposé à l'infini, donc avec des rayons parallèles) sur un plan

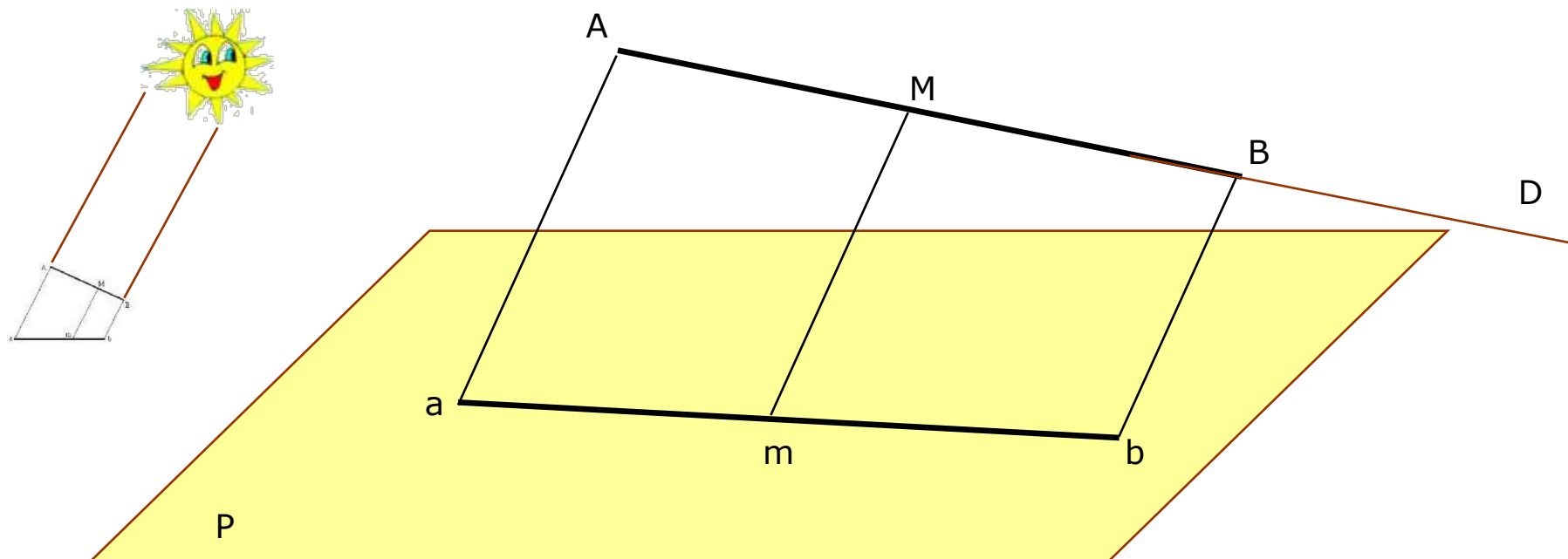


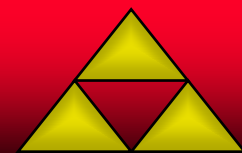
- **Perspective cavalière** : cas particulier de la perspective parallèle. La figure est dessinée sur un plan situé face à l'utilisateur



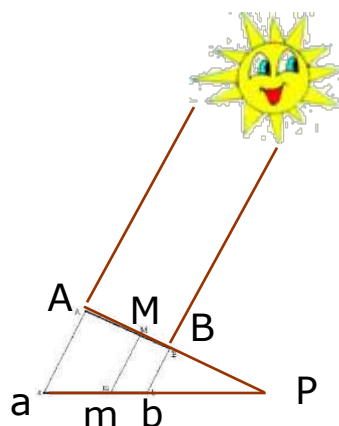


- **Perspective parallèle :**
- Soit P un plan et D une droite qui n'est ni parallèle ni perpendiculaire à ce plan.
- On appelle perspective parallèle la projection sur P parallèlement à D . La représentation cavalière d'un objet est donc son image par cette projection.
- M est milieu de AB , m est milieu de ab (Thalès)

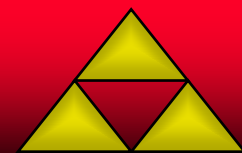




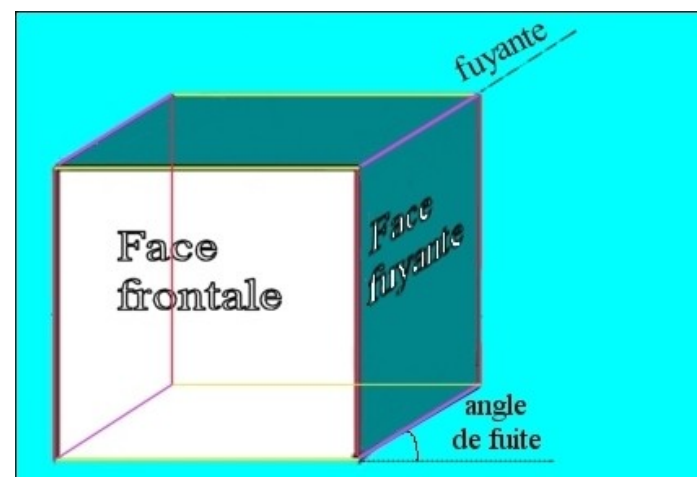
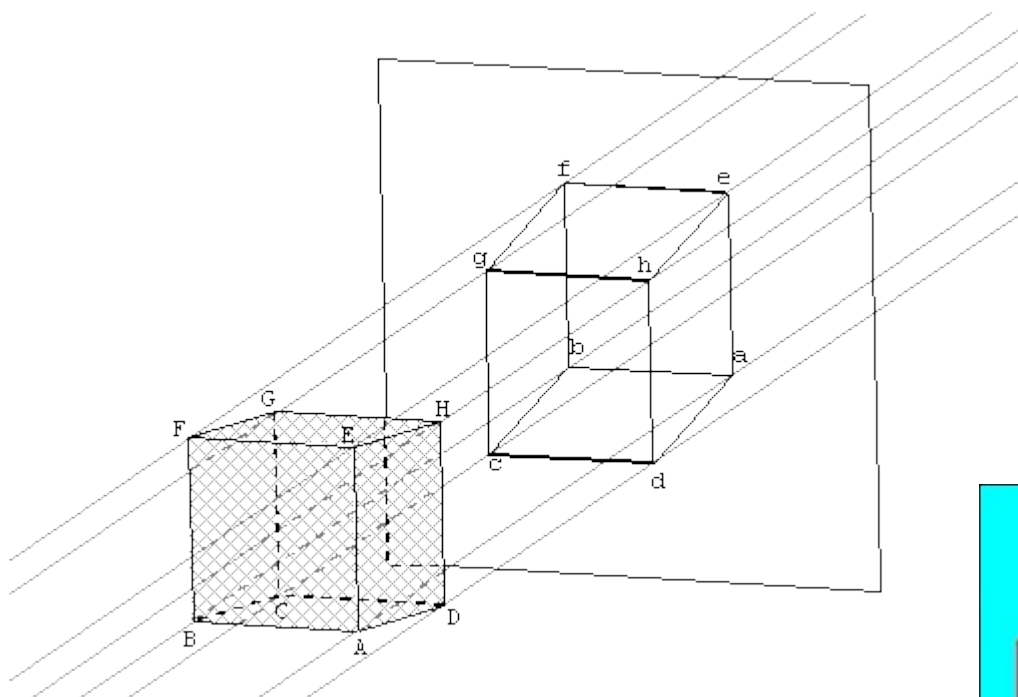
- **Perspective parallèle :**
- Des propriétés de cette projection on déduit les relations qui existent entre les éléments caractéristiques de l'objet lui-même et ceux de sa représentation. Ainsi :
 - la perspective cavalière conserve l'alignement, le parallélisme, le rapport des longueurs de deux segments parallèles (en particulier elle conserve les milieux)
 - toute figure contenue dans un plan parallèle à P est représentée en vraie grandeur (longueurs des segments, mesures des angles)
 - les cercles sont suivant les cas représentés par des segments, des cercles ou des ellipses.

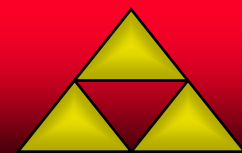


Les rapports se conservent car le théorème de Thales s'applique pour les triangles APa, BPb, MPm

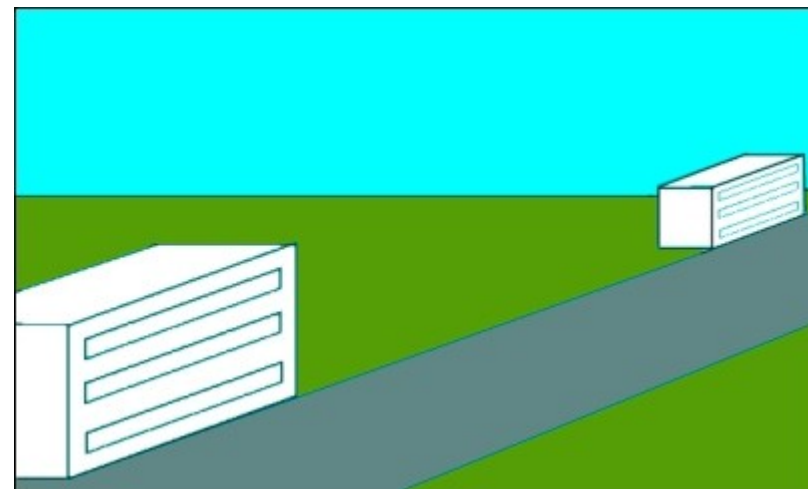


- Perspective parallèle :**

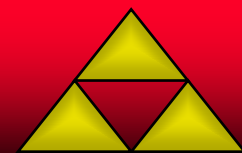




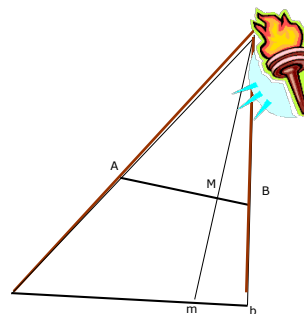
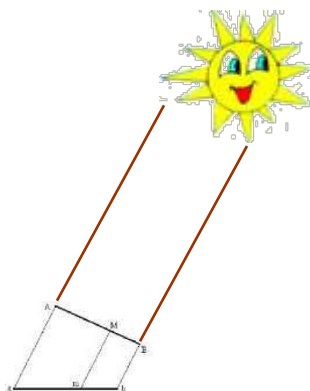
- **Perspective parallèle :**
- Nous constatons que la perspective cavalière, en conservant le parallélisme, ne permet pas de représenter correctement la perception visuelle d'un espace à trois dimensions.
- Il est donc évident que le dessinateur d'Art ou le peintre qui désire réaliser une œuvre figurative sera souvent dans l'obligation d'utiliser un autre mode de dessin pour rendre compte de l'espace tridimensionnel.



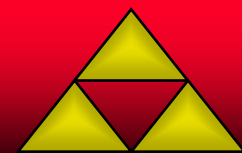
Perspective centrale



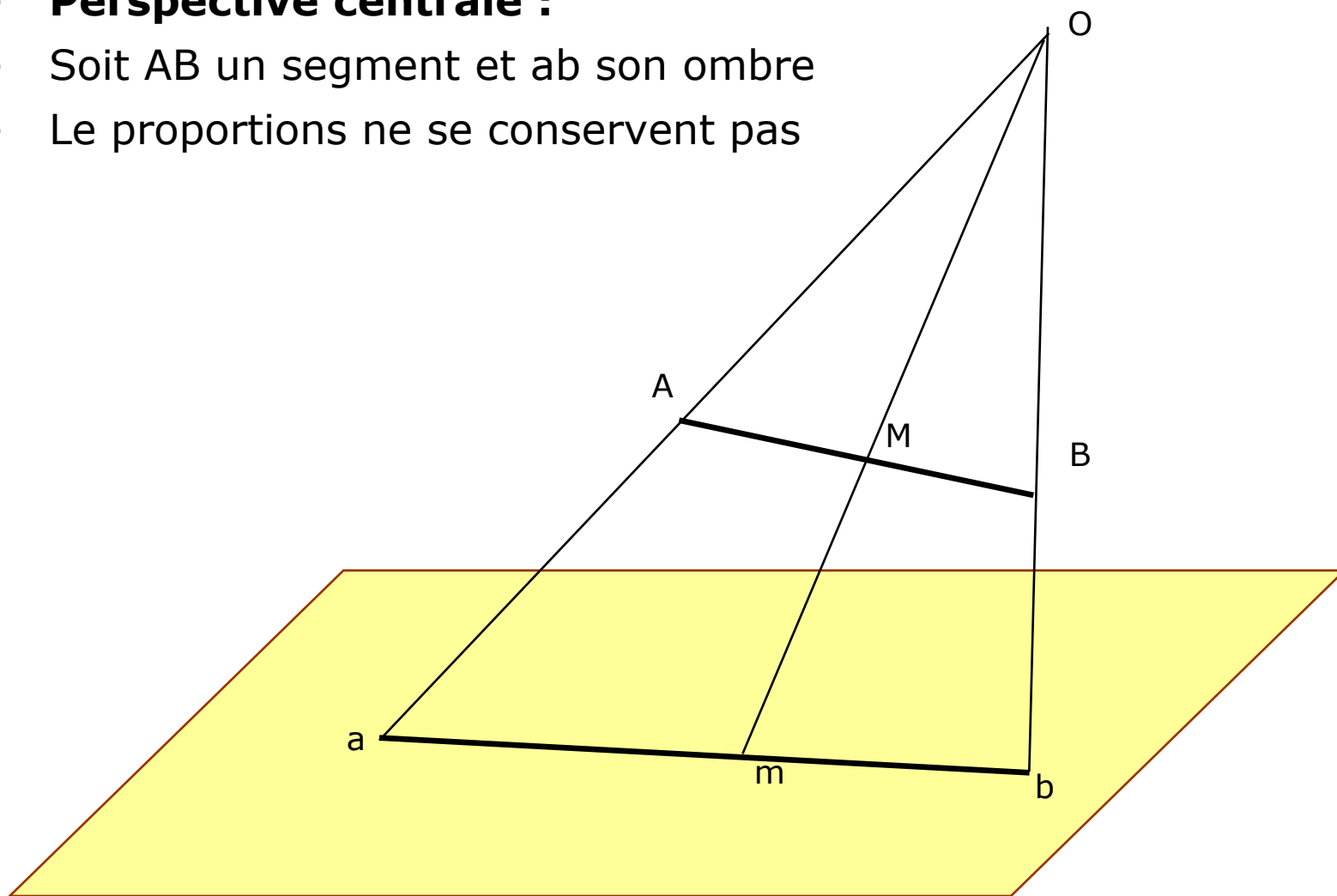
- **Perspective centrale :**
- La lumière est émise à partir d'une source O qui n'est pas considérée à l'infini.
- Les rayons lumineux divergent à partir de la source



Perspective centrale



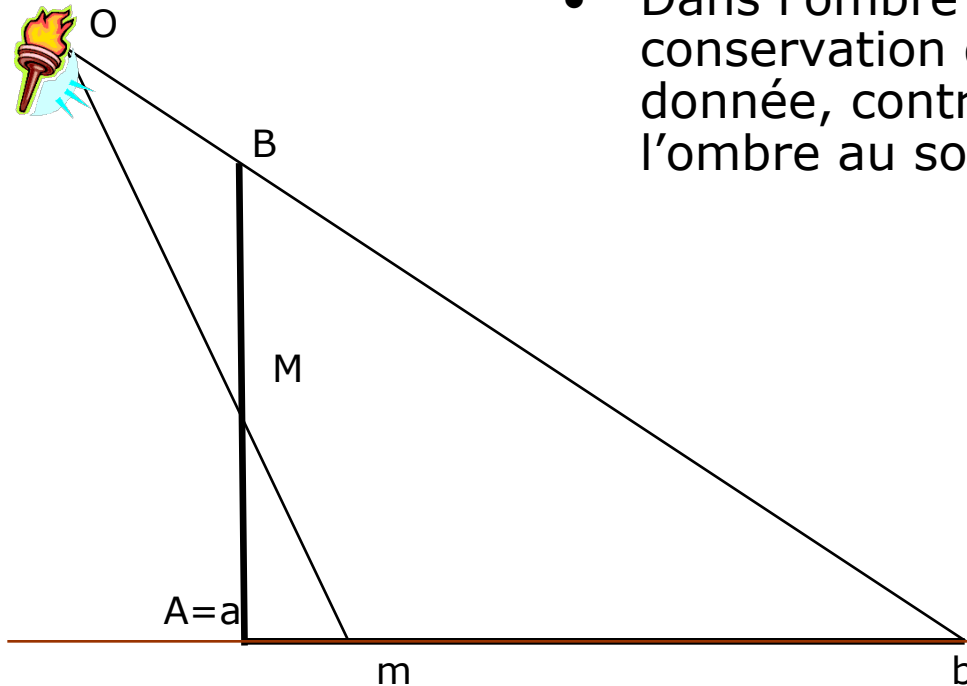
- **Perspective centrale :**
- Soit AB un segment et ab son ombre
- Les proportions ne se conservent pas



Ombre au flambeau



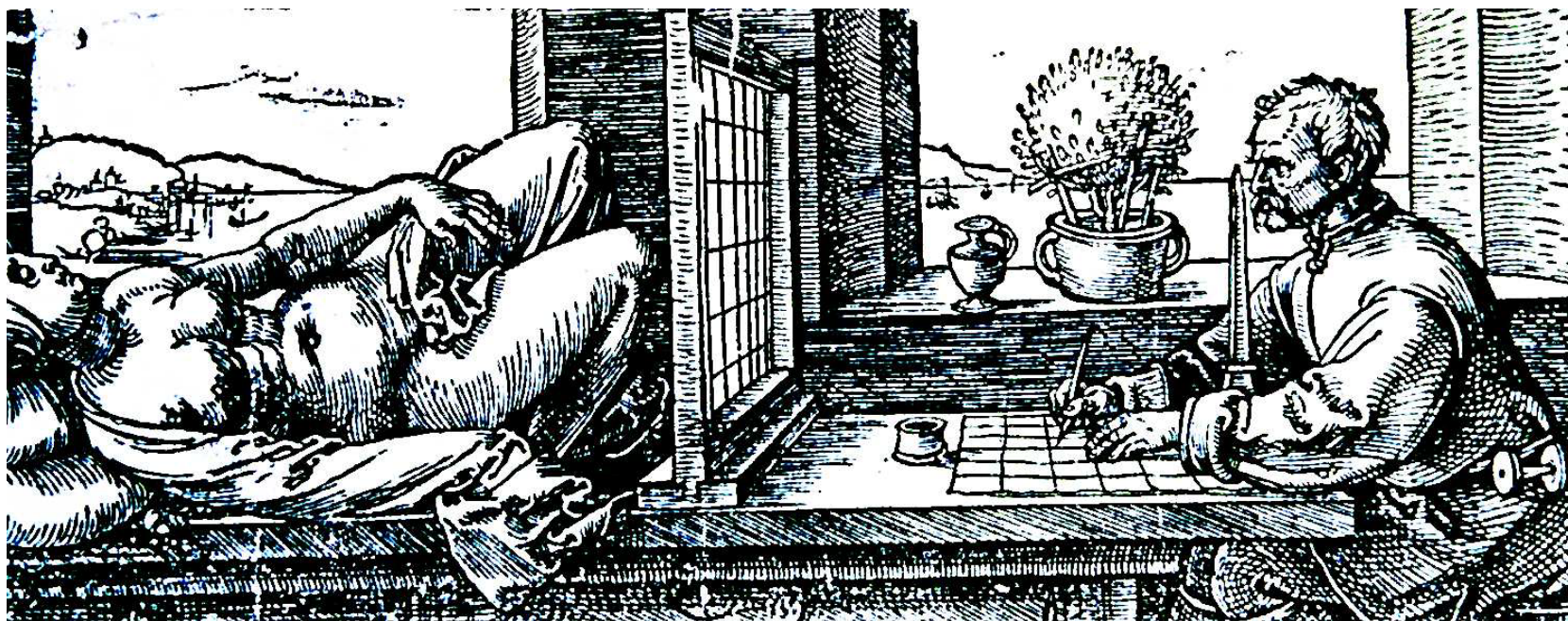
- **L'ombre au flambeau:**
- Ombre au flambeau opposée à ombre au soleil
- M est milieu de AB mais m n'est pas milieu de ab
- Dans l'ombre au flambeau, il n'y a pas conservation du rapport dans une direction donnée, contrairement à ce qui se passe pour l'ombre au soleil.



De l'ombre au dessin : la fenêtre de Dürer



- **La fenêtre de Dürer (ou d'Alberti)**
- Les arts graphiques de la Renaissance se proposaient de représenter l'espace sur une surface plane, de façon que, pour l'observateur, l'œuvre puisse se superposer à la réalité.
- Le principe est matérialisé par un dispositif théorisé par Alberti et représenté par Albrecht Dürer.



De l'ombre au dessin : la fenêtre de Dürer



- **La fenêtre de Dürer**
- Le dispositif fonctionne ainsi :
 - La position de l'œil de l'opérateur est fixée grâce à un œilleton;
 - Une « fenêtre fixe » est placée entre cet œil et l'objet à représenter
- Tout point de l'objet sera alors représenté par l'intersection du rayon lumineux joignant ce point à l'œil avec le plan de la fenêtre.





- **P** : le plan de la fenêtre
- **O** : l'œilleton
- Le dessin de **M** est m

De l'ombre au dessin : la fenêtre de Dürer

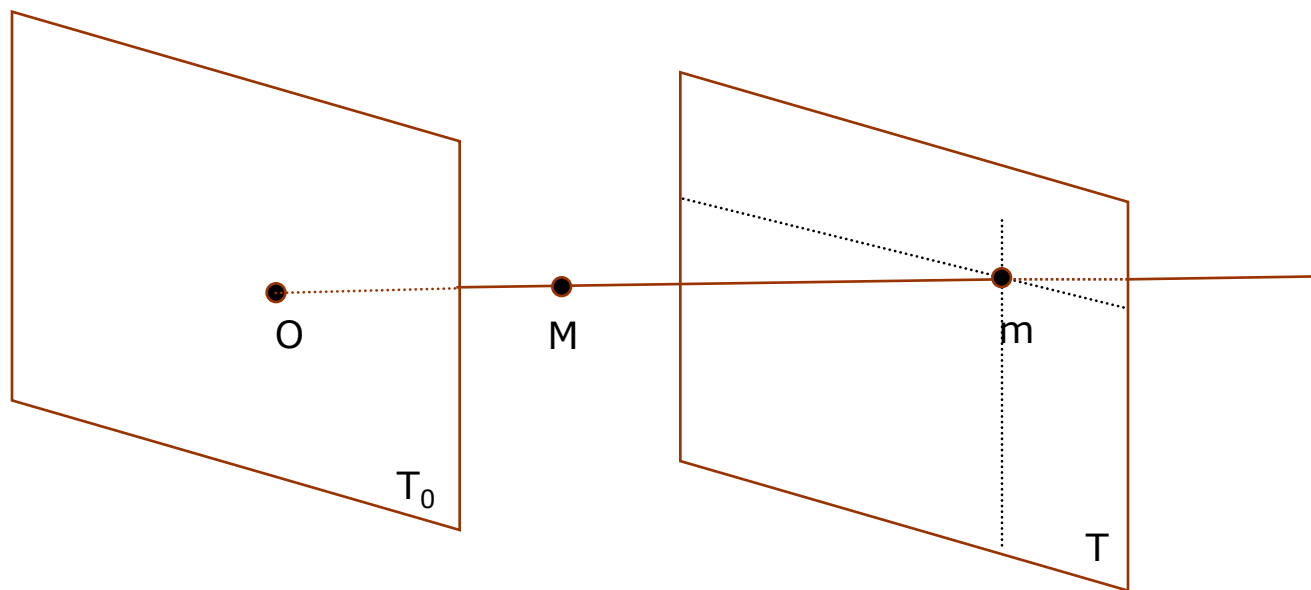
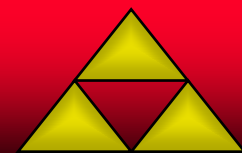


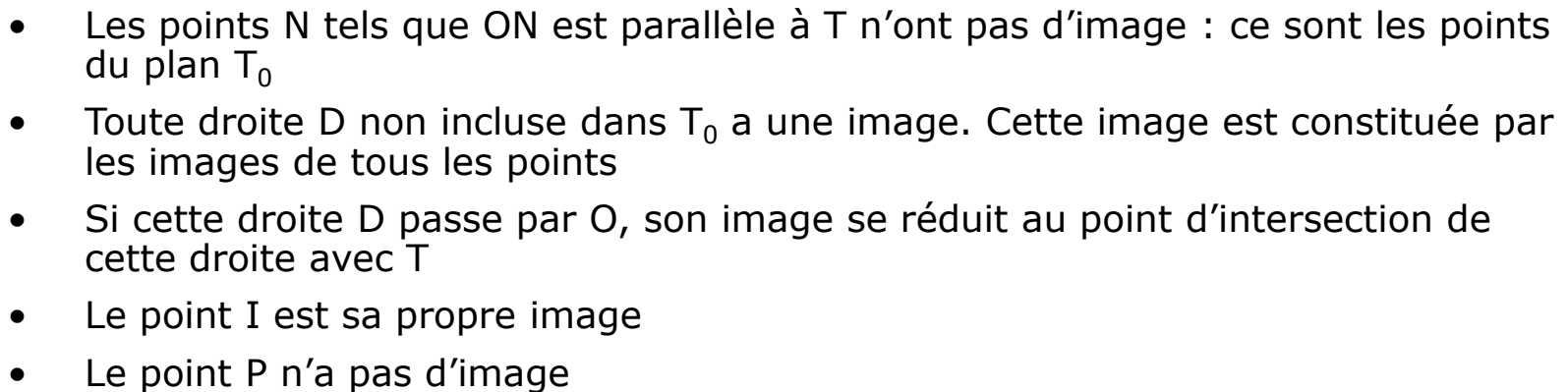
- **Fenêtre de Dürer et ombre au flambeau**
- Points identiques
 - L'œilleton O correspond à la source lumineuse O
 - La fenêtre P correspond au sol
 - L'image d'un point M (ombre ou dessin) s'obtient comme intersection de (OM) avec P
- Différences :
 - Dans le cas de l'ombre, l'objet M situé entre O et P , dans le cas de l'image, il est situé de l'autre côté de P
 - P est supposé horizontal dans le cas de l'ombre et P est vertical dans le cas de la fenêtre

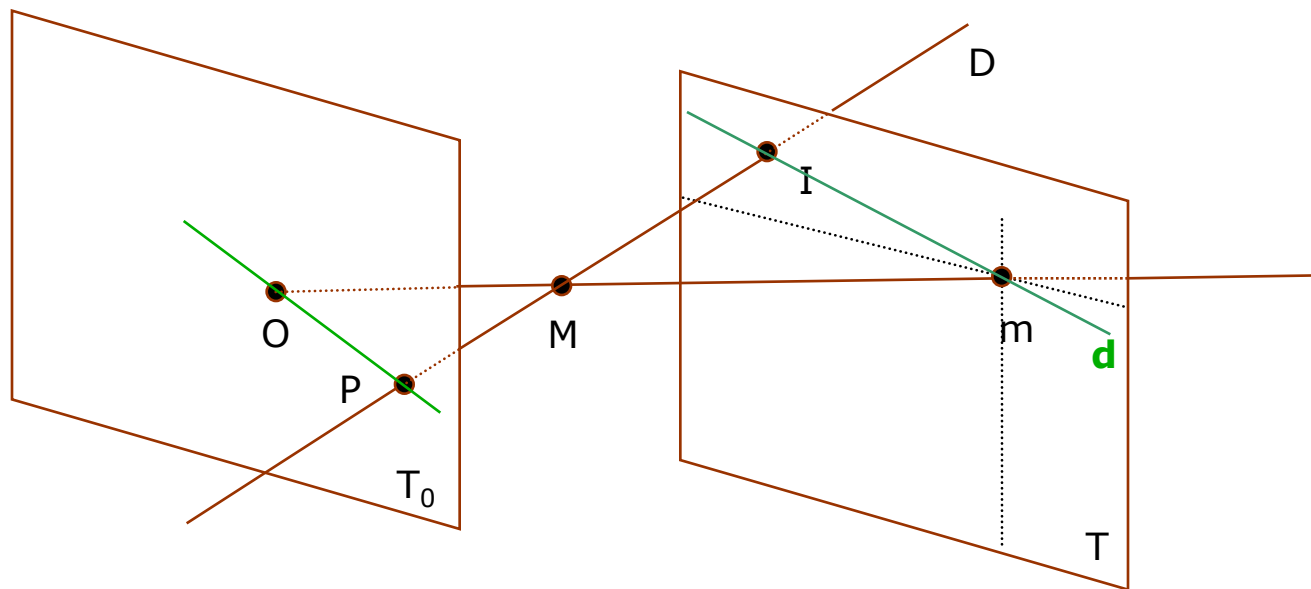
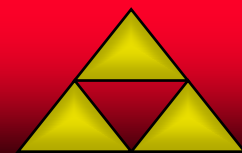


- **Définition**
- Soit un point O et un plan T tel que O n'est pas dans T .
- A tout point M de l'espace, on associe le point m , intersection de OM avec T .
- m est le **projeté** de M dans une **projection sur T de centre O** (Mathématiques).
- m est l'image de M dans une **perspective de point de vue O et de plan du tableau T** (dessin).
- Dans ce dernier cas, on se limite à considérer les points situés dans le demi-espace contenant T et limité par le plan T_0 parallèle à T passant par O .

Perspective centrale

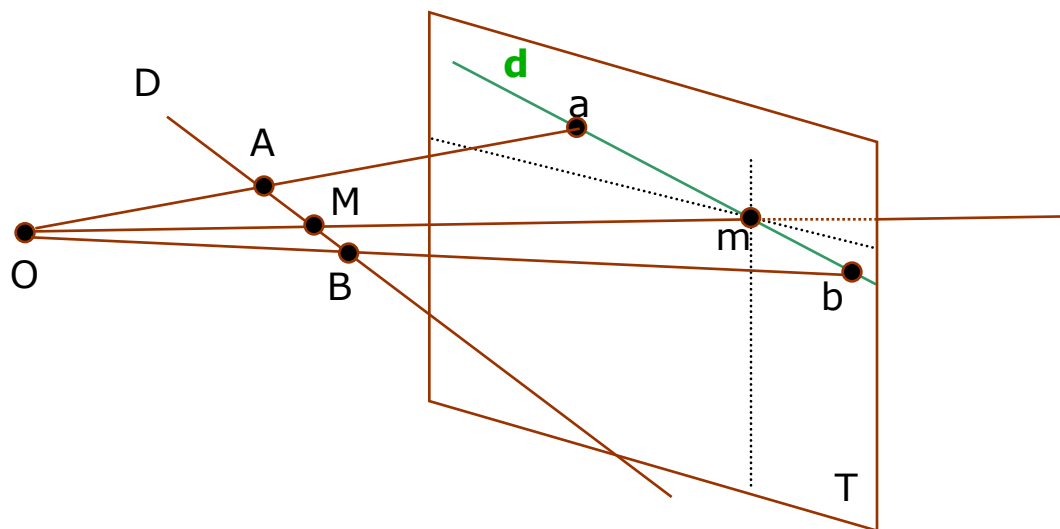






- D perce le plan T en I et le plan T_0 en P
- Toutes les images des points de D sont alignées sur une droite d
- Cette droite d est l'intersection du plan du tableau T avec le plan défini par O et D (plan , D)
- d est parallèle à OP

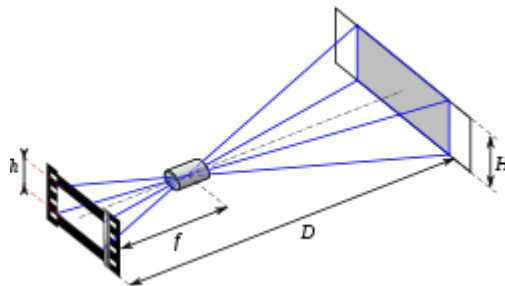
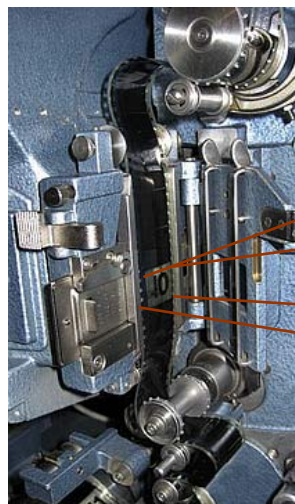
Y a-t-il conservation des proportions ?



- Nous avons vu dans l'ombre au flambeau que les proportions (donc les milieux) ne sont pas respectées.
- IL y a néanmoins un cas particulier, celui des segments parallèles au plan du tableau.
- La droite (AB) est parallèle au plan T du tableau
- On reconnaît une configuration de Thalès qui permet d'écrire :

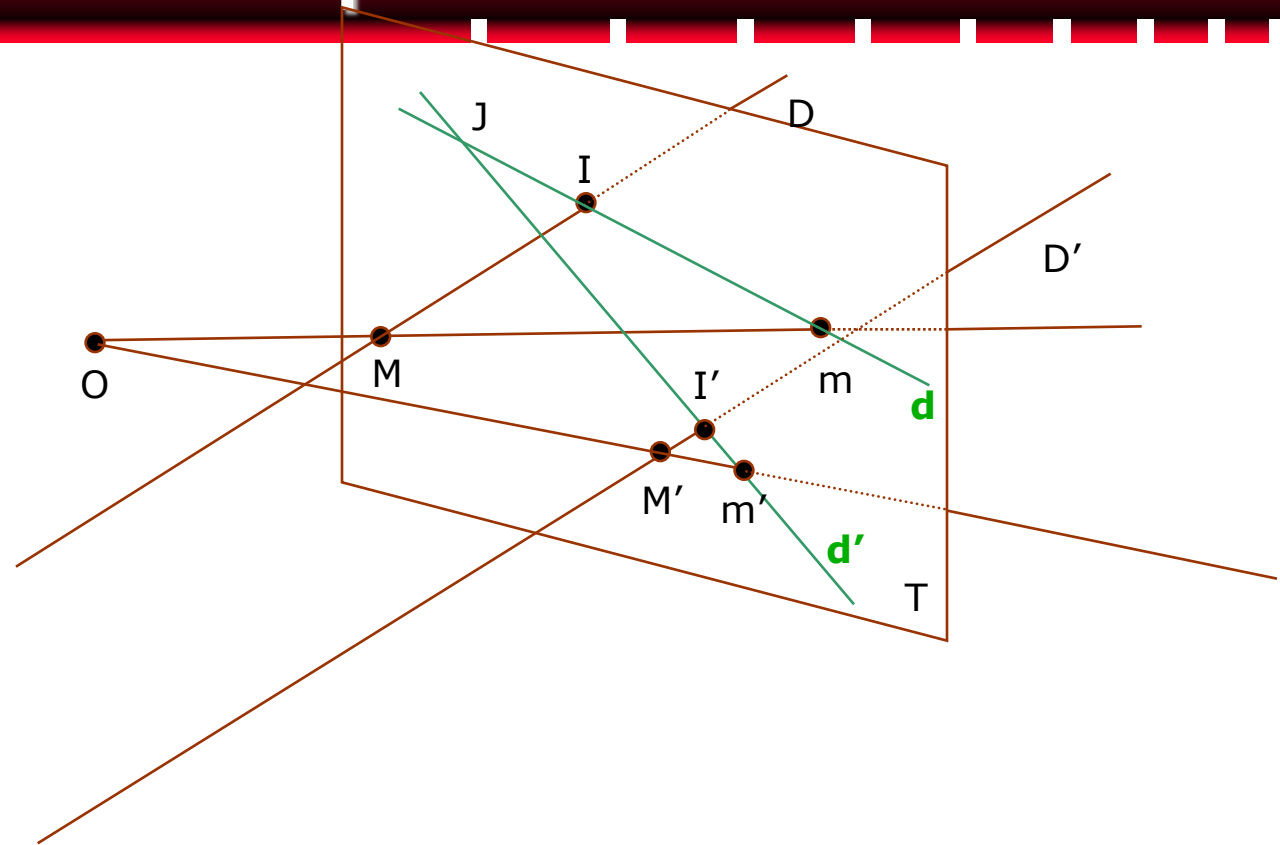
$$\frac{am}{AM} = \frac{ab}{AB} = \frac{Oa}{OA} \Rightarrow \frac{am}{ab} = \frac{AM}{AB}$$

Y a-t-il conservation des proportions ?



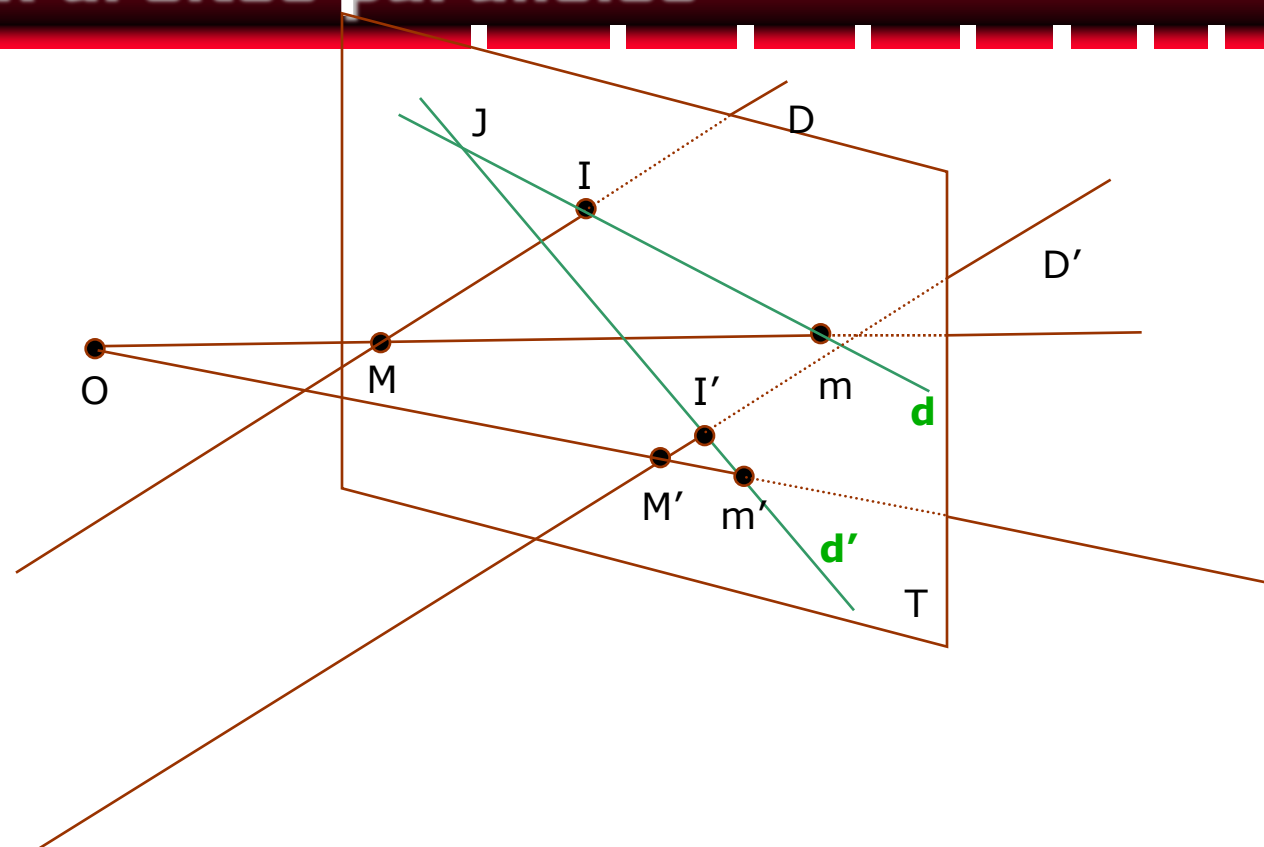
- Dans le cas particulier des droites parallèles au plan du tableau, la projection conserve les proportions.
- C'est heureux, car les projections de diapos et de films nous restitueraient sur l'écran une image déformée

Image de deux droites parallèles



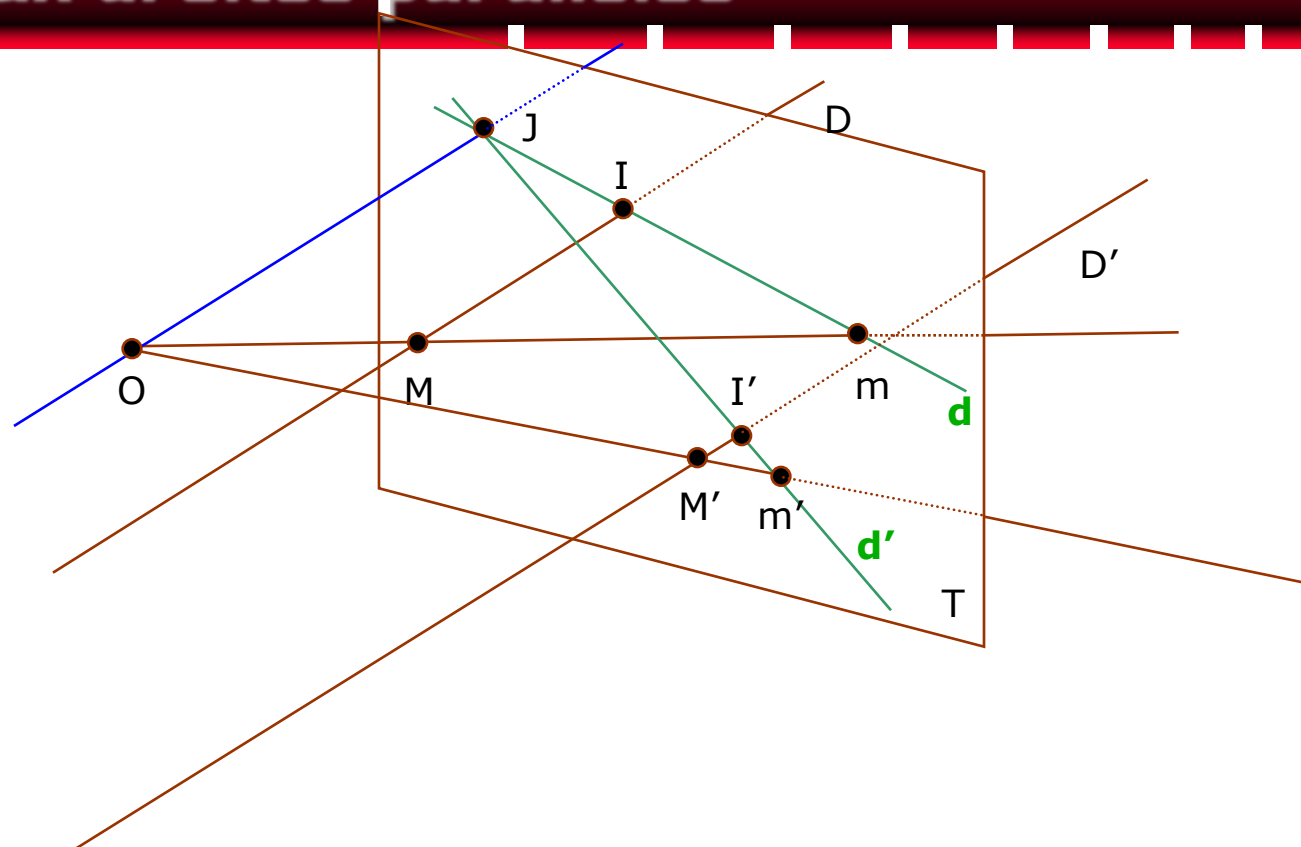
- Soit D et D' deux droites parallèles ne passant pas par O
- Soit d et d' leurs images respectives

Image de deux droites parallèles



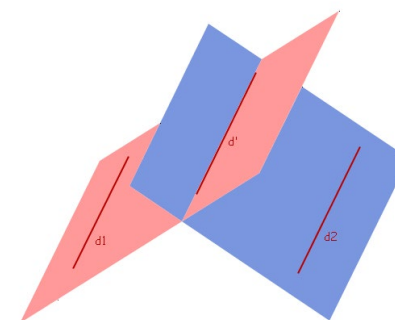
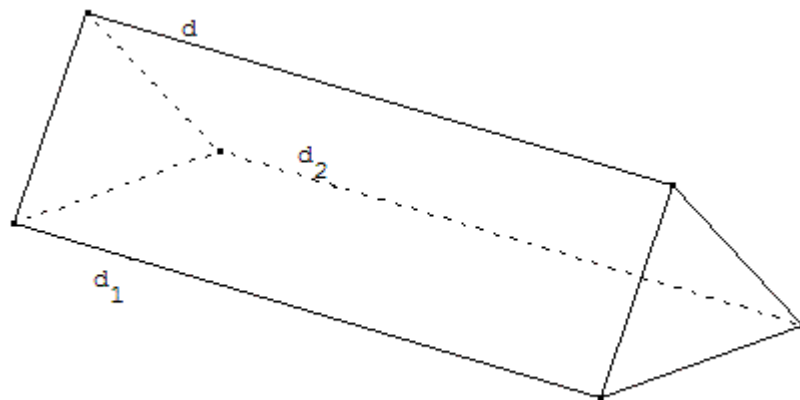
- La droite d est l'intersection du plan T avec le plan (O, D)
- La droite d' est l'intersection du plan T avec le plan (O, D')
- Les plans OD et OD' ont au moins en commun le point O
- Ils sont donc sécants ou confondus : ils ne sont pas parallèles

Image de deux droites parallèles



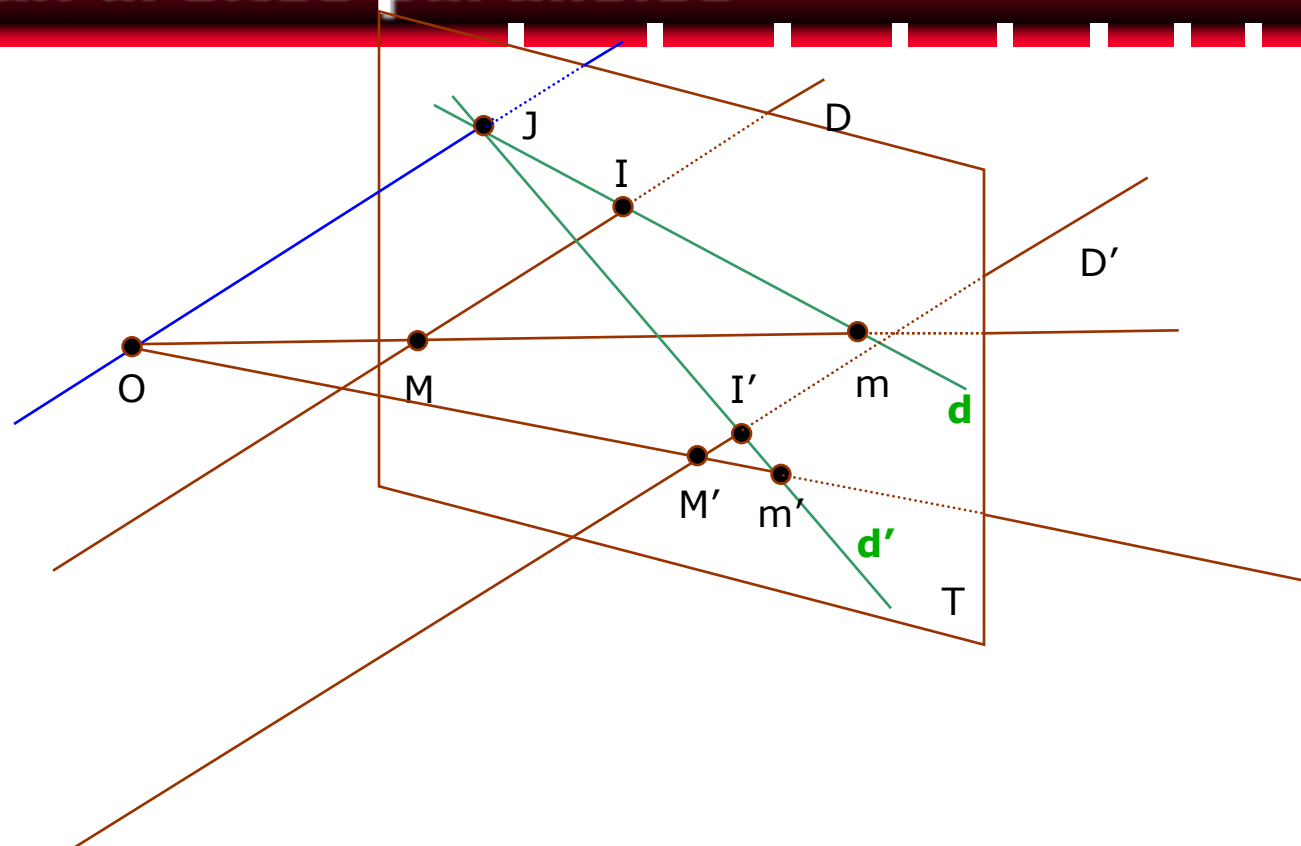
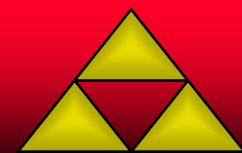
- S'ils sont confondus, il en va de même pour les droites d et d'
- S'ils sont sécants (cas de la figure) le « théorème du toit » nous dit que leur droite d'intersection OJ est la parallèle à D (et à D') passant par O

Rappel : Théorème du toit



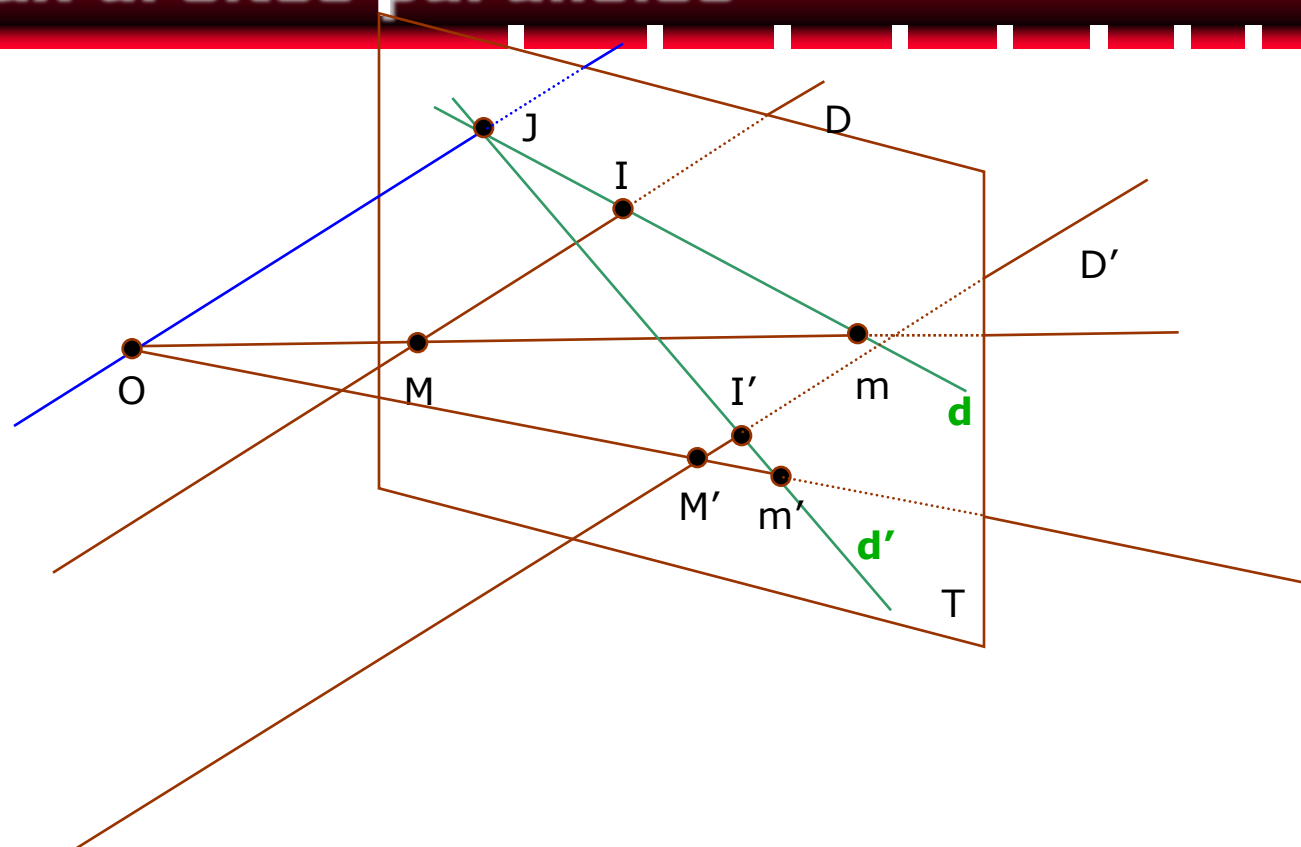
- En géométrie euclidienne de l'espace, on énonce le théorème suivant - dit "du toit"
- **Théorème du toit** : Si une droite d' est parallèle à deux plans sécants $P1$ et $P2$, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection d .
- Autre formulation (cas figure) : Si on a deux droites parallèles $d1$ et $d2$, un plan $P1$ contenant $d1$, un plan $P2$ contenant $d2$ et $P1$ et $P2$ sécants suivant une droite d alors l'intersection d des deux plans est parallèle aux droites $d1$ et $d2$.

Image de deux droites parallèles

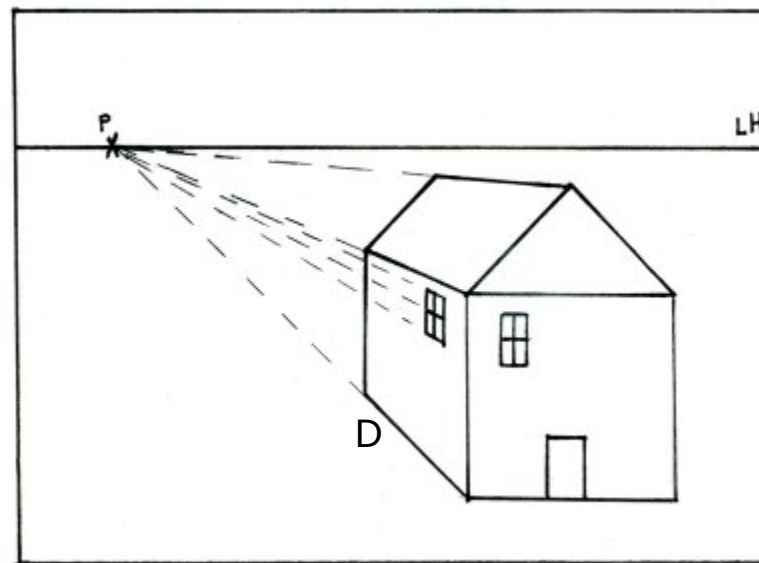
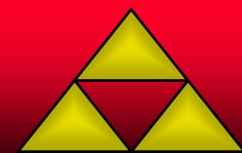


- Revenons à notre schéma de projection de D et D'
- OJ , droite d'intersection des plan (O,D) et (O,D') coupe le plan T en J
- Ce point J est aussi le point d'intersection des droits d et d' puisque d et d' marquent l'intersection des plans (O, D) et (O, D') avec T

Image de deux droites parallèles



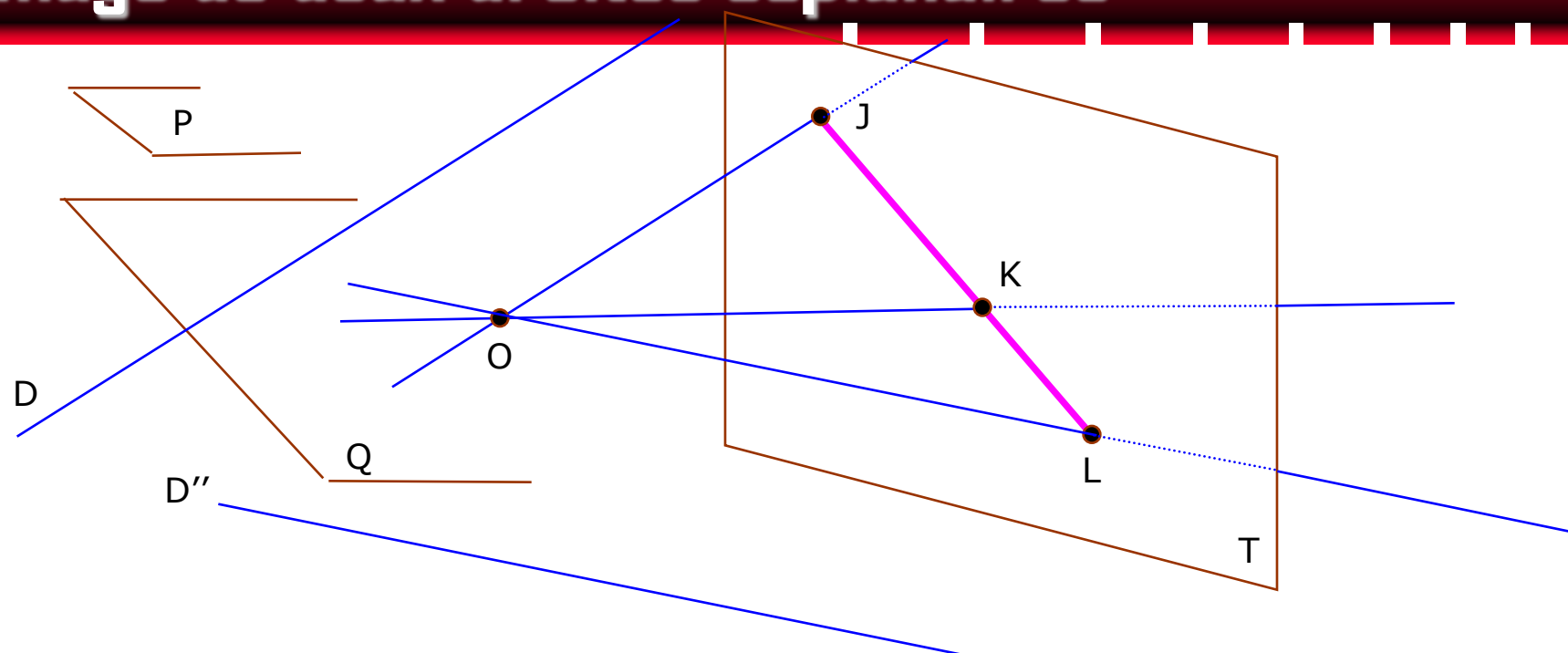
- **Conclusion :**
- Les droites images de deux droites D et D' parallèles entre elles et au plan du tableau leurs sont parallèles. Les proportions sont alors respectées.
- Les droites images de deux droites parallèles entre elles mais sécantes au plan du tableau sont sécantes en un point (**point de fuite**) qui est l'intersection du plan du tableau avec la parallèle à D et à D' passant par le point de vue O .



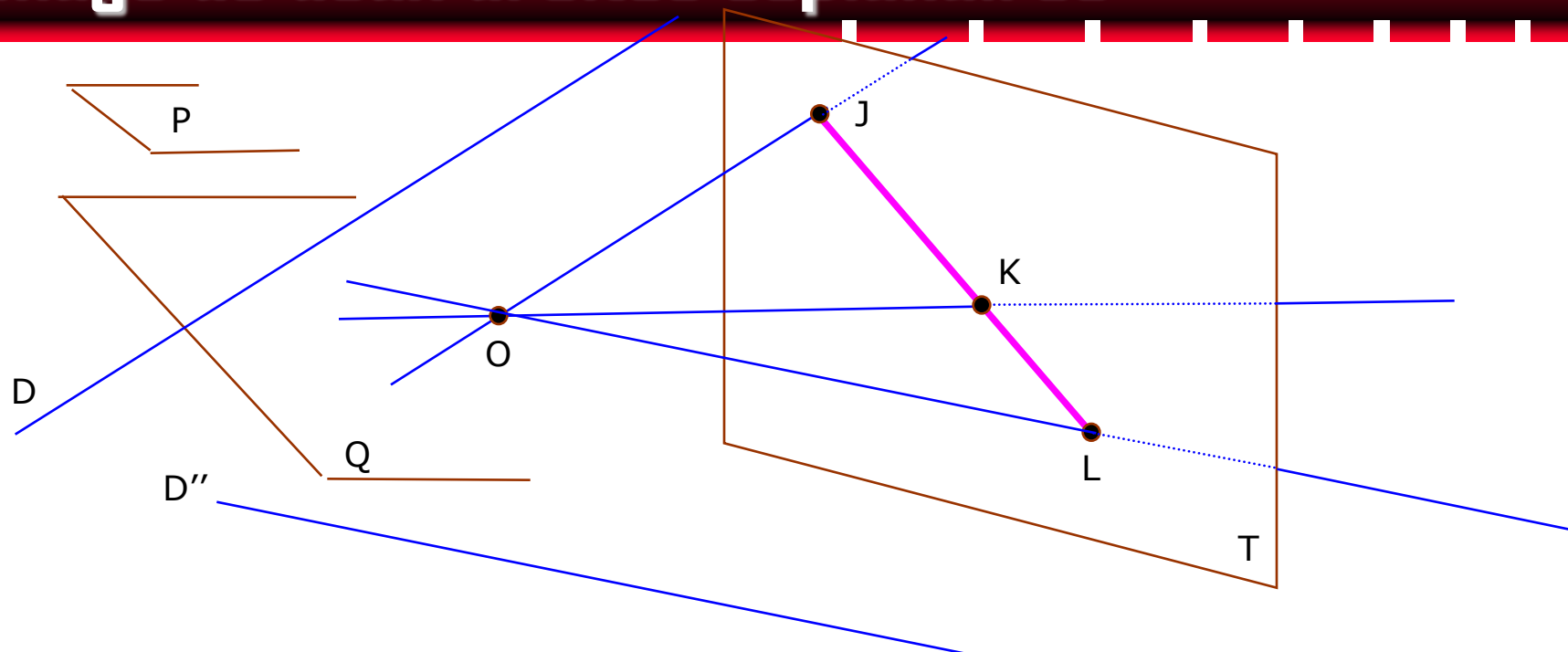
- **Conséquence :**
- Soit une droite donnée D sécante au plan du tableau.
- Toutes les droites images des droites parallèles à D passent par un même point, appelé **point de fuite** de la droite D .
- Le point de fuite est l'image du point à l'infini de D et de toutes les droites qui lui sont parallèles.



Image de deux droites coplanaires



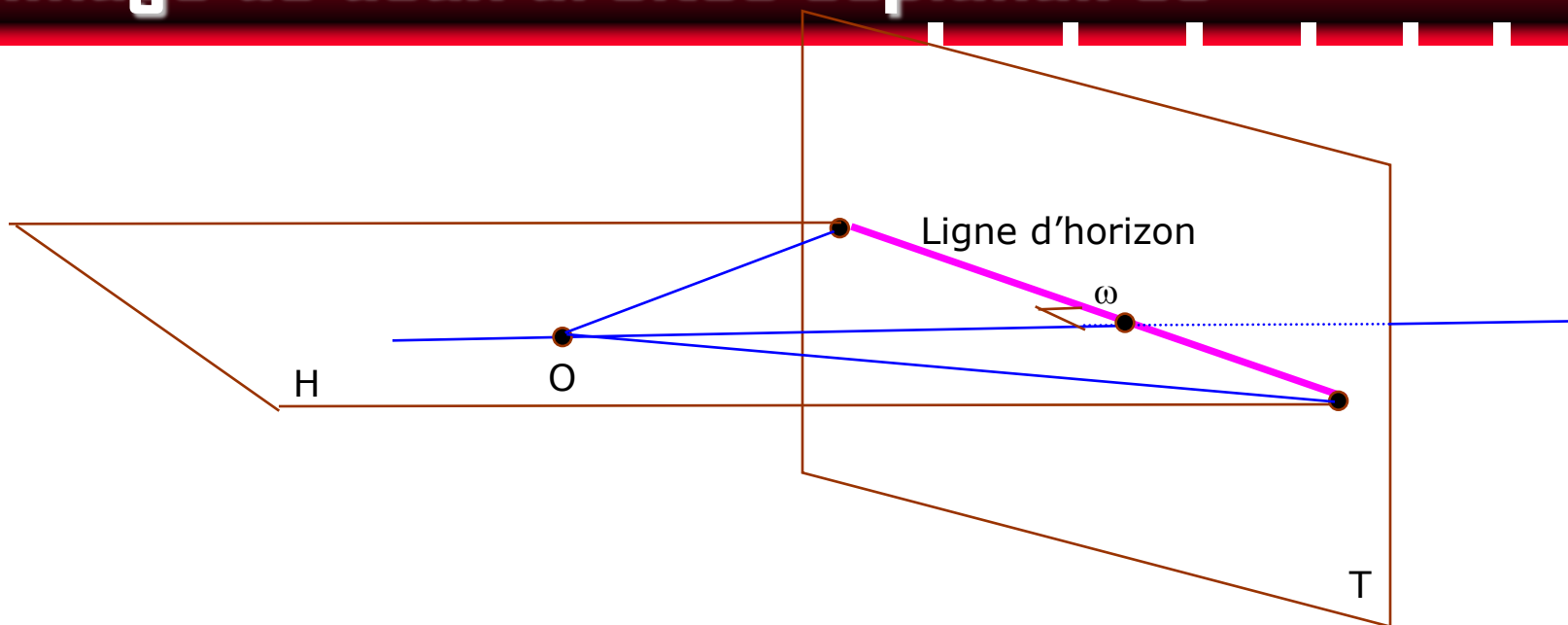
- Soit les droites D , D' (non représentée) et D'' parallèle à un même plan P .
- On suppose que ces 3 droites ont un point de fuite, respectivement I , K , L
- Ces points de fuite sont les intersections, avec le plan du tableau T , des droites OJ , OK et OL passant par O .
- Ces droites OI , OJ et OK sont incluses dans le plan Q , parallèle à P et passant par O
- Les points de fuite sont donc sur la droite d'intersection de Q avec le plan du tableau.



- Les points de fuite de toutes les droites parallèles à un plan P constituent une droite appelée **ligne de fuite** du plan P.
- Cette droite est l'intersection du tableau avec le plan parallèle à P passant par le point de vue O.

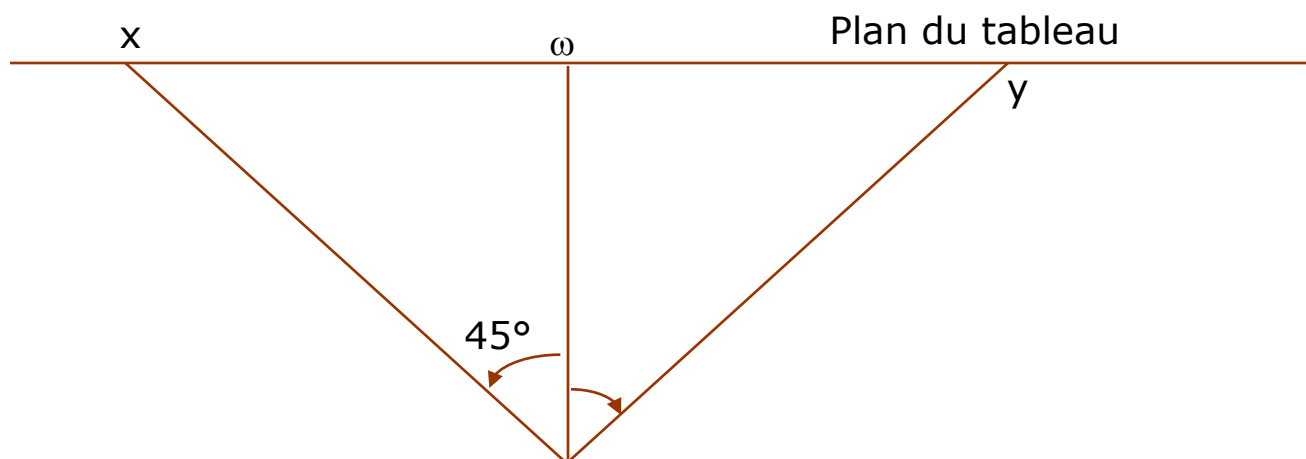
- Une droite a un point de fuite.
- Un plan a une ligne de fuite et un point de fuite principal.
- Deux plans parallèles ont même ligne de fuite

Image de deux droites coplanaires



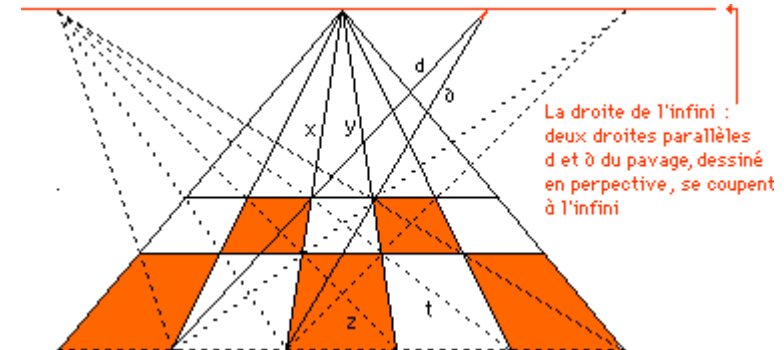
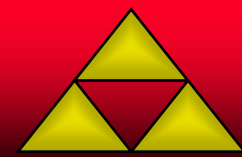
- Toutes les droites horizontales ont leur point de fuite sur la droite d'intersection du plan du tableau avec le plan horizontal passant par le point de vue.
- Cette droite est la **ligne d'horizon**.
- Le plan du tableau étant vertical, les droites qui lui sont perpendiculaires sont des horizontales, et par conséquent leur point de fuite est situé sur la ligne d'horizon.
- H est le plan horizontal passant par O
- ω est le point de fuite principal

Image de deux droites coplanaires

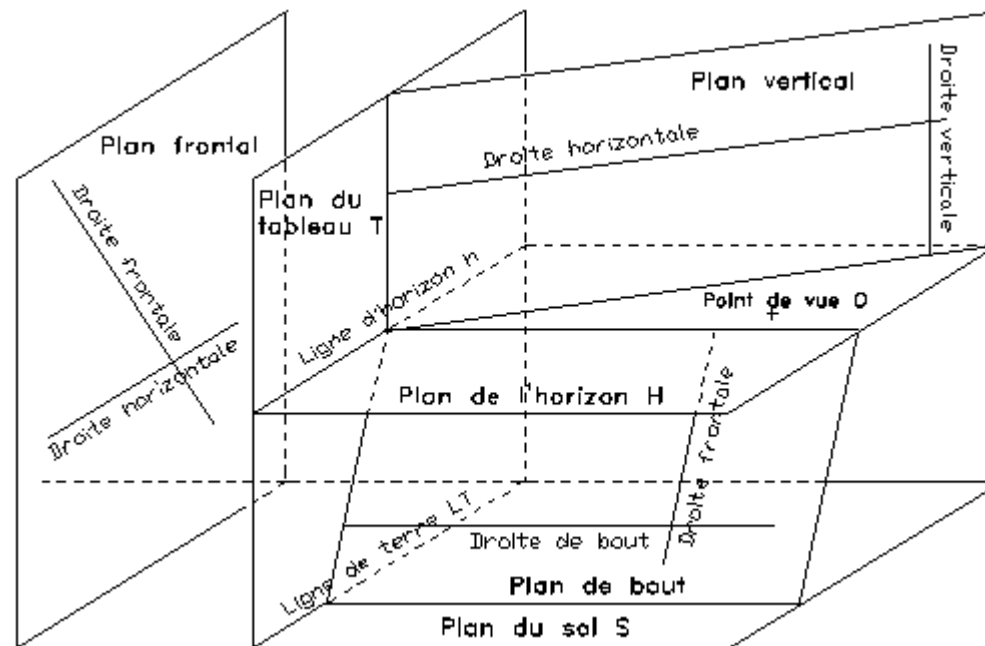
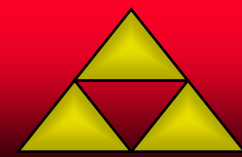


- Les **points de distance x et y** sont les points de fuite des droites horizontales faisant un angle de 45° avec la perpendiculaire au plan du tableau.
- Ils sont sur la ligne d'horizon.
- Le triangle xOy est isocèle, d'où $Ox = Oy =$ distance OO du point de vue.

Image de deux droites coplanaires

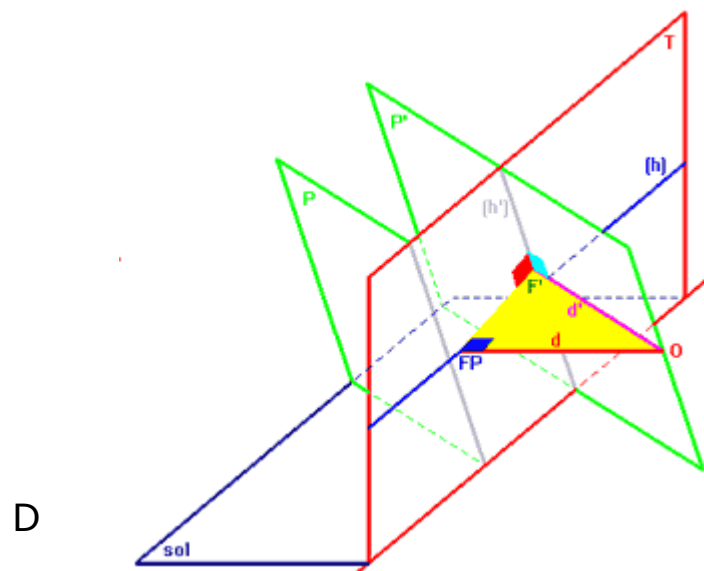


- Pour un tableau réalisé en perspective centrale, il existe un unique point de l'espace d'où on le voit (en fermant un œil) comme il a été conçu.
- C'est le point de vue.
- On peut déterminer la position de ce point de vue lorsqu'on a repéré, sur le tableau, le point de fuite principal et l'un des points de distance.



- **Repérez :**
 - Le point de vue
 - Le plan de l'horizon
 - La ligne d'horizon
 - Le plan du tableau
 - Le plan du sol
 - La ligne de terre
 - **Repérez :**
 - Un plan frontal
 - Un plan vertical

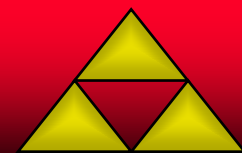
Éléments de référence d'un plan



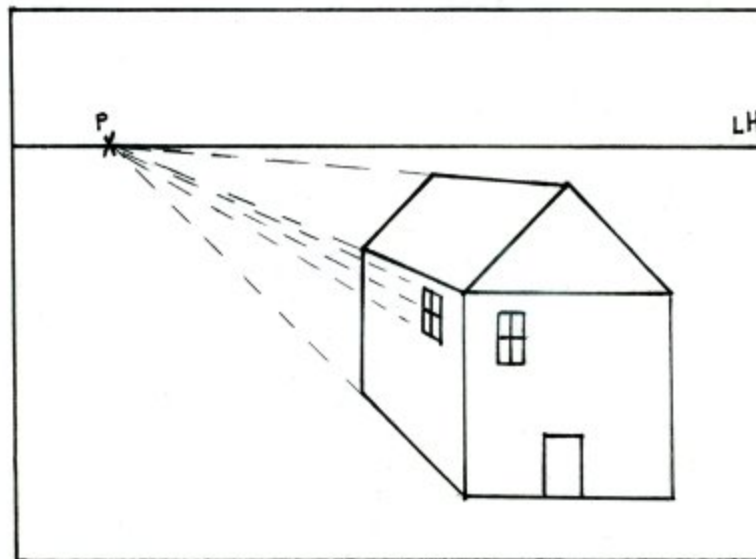
- Sur le dessin, un plan P est caractérisé par sa **ligne de fuite**, son **point de fuite principal** et sa **distance**.
- La **ligne de fuite** du plan P est la droite d'intersection (h') du plan P' , parallèle à P et passant par O, avec le plan du tableau. Elle contient par conséquent les points de fuite de toutes les droites contenues dans P.
- Le **point de fuite principal** du plan P est le projeté orthogonal F' du point O sur la droite (h') . C'est le point de fuite des droites de P parallèles à (OF') , donc orthogonales à (h') .
- La distance d' du plan P est la distance OF' .
- On appelle points de distance de P les deux points $D'1$ et $D'2$ de (h') tels que $F'D'1 = F'D'2 = d'$



- **La perspective à point de fuite**
- Dans cette représentation, les lignes parallèles (lignes de carrelage, poutres au plafond, arêtes des murs...) sont représentées par des segments qui semblent converger en un même point de fuite ...
- Sauf si leur direction est parallèle au plan du tableau : dans ce cas, elles sont bien représentées par des lignes parallèles.
- Cette représentation est appelée **perspective à point de fuite.**, qui reprend les principes de la perspective centrale.
- On parle de « **première règle de la perspective** » pour désigner cette propriété des droites parallèles qui convergent vers le point de fuite.



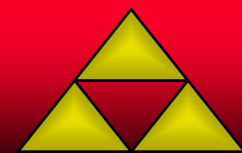
- **Perspective à 1 point de fuite :**



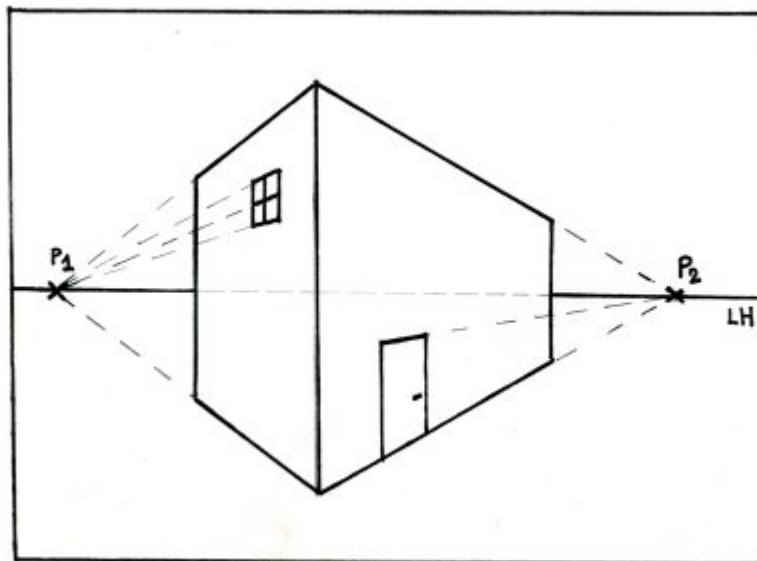


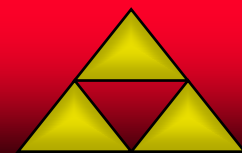
- **La perspective à point de fuite**





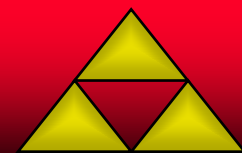
- **Perspective à 2 points de fuite :**





- **Dessin d'une boîte posée sur une autre**

Avons-nous atteint nos objectifs ?



- XXXXXX

