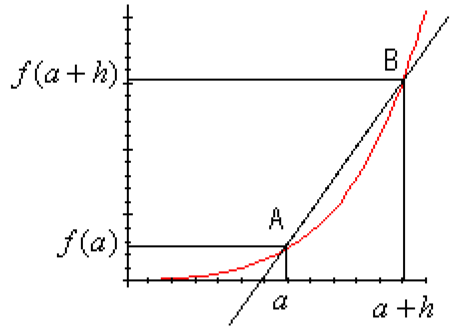
Nombre dérivé

Introduction graphique : limite de la sécante et tangente

L'approche géométrique est fondamentale, avant de donner une définition précise

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.



Notons A le point de C de coordonnées (a ; $f(a)$)

Notons B le point de C de coordonnées ($a+h$; $f(a+h)$)

Alors le coefficient directeur de la sécante (AB) est : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Supposons que le point B se rapproche de A, c'est à dire que h tend vers 0. Alors la droite (AB) tend vers la tangente à la courbe C au point A. Cette tangente aura donc pour coefficient directeur le nombre égal à $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Au fur et à mesure que le point B se rapproche de A (on dit que B tend vers A), la droite AB pivote.

Lorsque B arrive en A, le droite AB est devenue la tangente en A

Ce nombre, s'il existe, est appelé **nombre dérivé de *f* au point *a***, et se note $f'(a)$ (lire "f prime de a")

Géométriquement, la tangente à C au point A se conçoit comme la droite "position limite" des sécantes (AB) lorsque B tend vers A en restant sur la courbe

Définitions Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un point a et tel que a ne soit pas une borne de I.

On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite finie quand h->0 c'est à dire si $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est un nombre réel fini. Ce nombre est appelé **nombre dérivé de *f* au point *a*** et est noté $f'(a)$

Définition : L'ensemble des réels pour lesquels $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe est appelé **ensemble de dérivabilité.**

Exemples : Etudions la dérivabilité de la fonction définie par $f(x)=x^2$ en 5.

Pour tout $h\neq 0$, on a : $\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\frac{(5+h)^2-5^2}{h}=\frac{10h+h^2}{h}=10+h$

On a donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=10$. Donc f est dérivable en x=5 et le nombre dérivé vaut 10

Si on répète le calcul pour x=6 , x=7, etc…on trouve $f'(6)$=12 , $f'(7)$=14 et on conjecture que $f'(a)=2a$ pour tout réel a.

EXERCICES

Exercice n°1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+4x-5$. Démontrer que f est dérivable en 3 et calculer $f'(3)$

Exercice n°2.

Etudier la dérivabilité en 0 de $x\to x\sqrt{x}$

Exercice n°1

Pour tout $h \neq 0$, on calcule :

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{3(3+h)^2+4(3+h)-5-\left(3\times 3^2+4\times 3-5\right)}{h}$$
$$=\frac{3\left(9+6h+h^2\right)+12+4h-5-34}{h}=\frac{27+18h+3h^2+12+4h-5-34}{h}$$
$$=\frac{3h^2+22h}{h}=3h+22$$

Puisque $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}3h+22=22$, on en conclut que f est dérivable en 3 et $f'(3)=22$

Exercice n°2

Pour tout $h \neq 0$, on calcule :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h\sqrt{h}-0}{h}=\frac{h\sqrt{h}}{h}=\sqrt{h}$$

Puisque $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\sqrt{h}=0$, on en conclut que f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$

Fonctions dérivées

Définition : On dit qu'une fonction f est **dérivable sur un intervalle *I*** lorsqu'elle est dérivable en tout réel de cet intervalle.

La fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui a tout réel a de I associe le nombre dérivé de f en a, $f'(a)$, est appelée **fonction dérivée de *f***, et est notée f' (lire "f prime")

Exemple :

Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$

On conjecture que pour tout réel a , f est dérivable et $f'(a)=2a$

On dira que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x$ est la **fonction dérivée** de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$

Dérivée de quelques fonctions usuelles

- **Fonction constante**

Soit f la fonction définie par $f(x)=k$ pour tout x réel, k étant un réel fixé.

Alors pour tout a réel $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{k-k}{h}=0$ donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=0$.

Ainsi la fonction constante est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout a réel, $f'(a)=0$

- **Fonction identité**

Soit f la fonction définie par $f(x)=x$ pour tout x réel.

Alors pour tout a réel $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{a+h-a}{h}=1$ donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=1$.

Ainsi la fonction identité est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout a réel, $f'(a)=1$

- **Fonction carré**

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2$ pour tout x réel.

Alors pour tout a réel $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h$ donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=2a$.

Ainsi la fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout a réel, $f'(a)=2a$.

- **Fonction cube**

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^3$ pour tout x réel. Alors pour tout a réel :

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^3-a^3}{h}=\frac{3a^2h+3ah^2+h^3}{h}=3a^2+3ah+h^2$ donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=3a^2$.

Ainsi la fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout a réel, $f'(a)=3a^2$

- **Fonction inverse**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$. Alors pour tout $a\in\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ et tout h tel que $a+h\neq 0$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{-\frac{h}{a(a+h)}}{h}=-\frac{1}{a(a+h)}$$ donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\frac{1}{a^2}$.

Ainsi la fonction inverse est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ et pour tout $a\in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, $f'(a)=-\frac{1}{a^2}$.

- **<u>Fonction racine</u>**

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$. Alors pour tout $a\in]0;+\infty[$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\times\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$ donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Ainsi la fonction racine est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $a\in]0;+\infty[$, $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$

Fonction	**Fonction dérivée**
$y=k$ constante	$y'=0$
$y=x$	$y'=1$
$Y=ax$	$Y'=a$
$y=x^2$	$y'=2x$
$y=x^3$	$y'=3x^2$
$Y=x^n$	$Y'=nx^{n-1}$
$y=1/x$	$y'=-1/x^2$
$y=\sqrt{x}$	$Y'=1/2\sqrt{x}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$

FONCTIONS	DERIVEES
x->*u*(*x*)+*v*(*x*)	*x*->*u*′(*x*) + *v*′(*x*)
x->*ku*(*x*) ;	*x*->*ku*'(*x*)
x->*u*(*x*) * *v*(*x*)	*x*->*u*′(*x*) * *v*(*x*)+*u*(*x*) * *v*′(*x*)
$x \to \frac{1}{v(x)}$	$x \to -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$
$x \to \frac{u(x)}{v(x)}$	$x \to \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

Exercices : Calculer les dérivées

1) $f(x)=x^3-3x^2+2x-5$

2) $f(x)=\frac{1}{2}x^4+x^3+\frac{5}{3}x$

3) $f(x)=2+\frac{3}{x}$

4) $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{5}$

5) $f(x)=\left(4x^2-7\right)\left(2+\frac{5}{x}\right)$

6) $f(x)=x\sqrt{x}$

7) $f(x)=\frac{1}{-8x+5}$

8) $f(x)=\frac{7}{6-x}$

9) $f(x)=\frac{1}{x^6}$

10) $f(x)=\frac{3x-1}{4x+2}$

11) $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{2(1-x)}$

12) $f(x)=(3x+2)^2$

13) $f(x)=(-5x+2)^7$

14) $f(x)=\sqrt{3x-1}$

15) $f(x)=8\sqrt{3-x}$

16) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x+1}}$

17) $f(x) = x\cos x-2\sin x$

18) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

19) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$

20) $f(x) = \cos 3x-\sin 2x$

CORRECTION DES EXERCICES

1) $f(x)=x^3-3x^2+2x-5$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^{3-1}-3\times 2x+2\times 1-0$ c'est à dire $f'(x)=3x^2-6x+2$

2) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4+x^3+\dfrac{5}{3}x$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{1}{2}\times 4x^3+3x^{3-1}+\dfrac{5}{3}\times 1$ c'est à dire $f'(x)=2x^3+3x^2+\dfrac{5}{3}$

3) $f(x)=2+\dfrac{3}{x}$

f est définie et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ car la fonction $x\text{->}\dfrac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

Pour tout $x\in\ ]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, $f'(x)=0+3\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ c'est à dire $f'(x)=-\dfrac{3}{x^2}$

4) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{5}$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{5}\left(x^2-3x+1\right)$, on a alors $f'(x)=\dfrac{1}{5}(2x-3)$

5) $f(x)=\left(4x^2-7\right)\left(2+\dfrac{5}{x}\right)$

f est définie et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ car la fonction $x\text{->}\dfrac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

$f(x)$ est de la forme $u(x)$x$v(x)$ avec $u(x)=4x^2-7$ donc $u'(x)=8x$ et $v(x)=2+\frac{5}{x}$ donc $v'(x)=-\frac{5}{x^2}$.

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, $f'(x) = u'(x)$x$v(x)+u(x)$x$v'(x)$ donc pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$,

$$f'(x)=8x\times\left(2+\frac{5}{x}\right)+\left(4x^2-7\right)\times\left(-\frac{5}{x^2}\right)=16x+40-20+\frac{35}{x^2}=16x+20+\frac{35}{x^2}$$

⚠ On aurait pu commencer par développer l'expression $f(x)=\left(4x^2-7\right)\left(2+\frac{5}{x}\right)$ puis dériver cette expression comme une fonction polynôme $f'(x)=16x+20-0-35\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=16x+20+\frac{35}{x^2}$. On retrouve bien le même résultat !

6) $f(x)=x\sqrt{x}$

f est définie sur $[0;+\infty[$

Pour la dérivabilité et le calcul de la fonction dérivée, il faut distinguer deux cas :

Sur $]0;+\infty[$, $f(x)$ est de la forme $u(x)$x$v(x)$ où u et v sont dérivables sur $]0;+\infty[$ avec $u(x)=x$ donc $u'(x)=1$ et $v(x)=\sqrt{x}$ donc $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ainsi, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = u'(x)$x$v(x)+u(x)$x$v'(x)$ donc $f'(x)=1\times\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

En 0, puisque u est dérivable mais pas v, il faut revenir à la définition :

Pour tout $h>0$, on calcule : $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h\sqrt{h}-0}{h}=\frac{h\sqrt{h}}{h}=\sqrt{h}$

Puisque $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\sqrt{h}=0$, on en conclut que f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$

Ainsi, pour tout $x\in[0;+\infty[$, $\boxed{f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}}$

⚠ On aurait pu écrire que pour tout $x\in[0;+\infty[$, $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ et appliquer la formule de dérivation d'une fonction puissance:

$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$.

On retrouve bien le même résultat !

7) $f(x)=\frac{1}{-8x+5}$

f est définie et dérivable sur $\left]-\infty;\frac{5}{8}\right[\cup\left]\frac{5}{8};+\infty\right[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]-\infty;\frac{5}{8}\right[\cup\left]\frac{5}{8};+\infty\right[$.

Puisque *f* est de la forme $f(x)=\frac{1}{u(x)}$, avec $u(x)=-8x+5$ (donc $u'(x)=-8$), on a :

Pour tout $x\in\left]-\infty;\frac{5}{8}\right[\cup\left]\frac{5}{8};+\infty\right[$, $f'(x)=-\frac{u'(x)}{(u(x))^2}=-\frac{-8}{(-8x+5)^2}=\frac{8}{(-8x+5)^2}$

8) $f(x)=\frac{7}{6-x}$

f est définie et dérivable sur $]-\infty;6[\cup]6;+\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-\infty;6[\cup]6;+\infty[$.

Puisque $f(x)=7\times\frac{1}{6-x}$ *f* est de la forme $7\times\frac{1}{u(x)}$, avec $u(x)=6-x$ (donc $u'(x)=-1$), on a :

Pour tout $x\in]-\infty;6[\cup]6;+\infty[$, $f'(x)=7\times\left(-\frac{u'(x)}{(u(x))^2}\right)=7\times\left(-\frac{-1}{(6-x)^2}\right)=\frac{7}{(6-x)^2}$

9) $f(x)=\frac{1}{x^6}$

f est définie et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

Puisque *f* est de la forme $f(x)=\frac{1}{u(x)}$, avec $u(x)=x^6$ (donc $u'(x)=6x^5$), on a :

Pour tout $x \in \left]-\infty; 0\right[\cup \left]0; +\infty\right[$, $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^2} = -\dfrac{6x^5}{\left(x^6\right)^2} = -\dfrac{6x^5}{x^{12}} = -\dfrac{6}{x^7}$.

On aurait pu écrire que pour tout $x \in \left]-\infty; 0\right[\cup \left]0; +\infty\right[$, $f(x)=x^{-6}$ et appliquer la formule de dérivation d'une fonction puissance :

$$f'(x) = -6x^{-6-1} = -6x^{-7} = -6 \times \frac{1}{x^7} = \frac{-6}{x^7}.$$

On retrouve bien le même résultat !

10) $f(x) = \dfrac{3x-1}{4x+2}$

f est définie et dérivable sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

Puisque *f* est de la forme $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x)=3x-1$ (donc $u'(x)=3$), et $v(x)=4x+2$ (donc $v'(x)=4$), on a :

pour tout $x \in \left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$, : $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{3(4x+2)-(3x-1)\times 4}{(4x+2)^2} = \dfrac{12x+6-(12x-4)}{(4x+2)^2} = \dfrac{10}{(4x+2)^2}$.

11) $f(x) = \dfrac{x^2-7x+10}{2(1-x)}$

f est dérivable sur $\left]-\infty; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]-\infty; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$,

et puisque *f* est de la forme $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, où $u(x)=x^2-7x+10 \Rightarrow u'(x)=2x-7$ et $v(x)=2(1-x) \Rightarrow v'(x)=-2$,

on en déduit que pour tout $x \in \left]-\infty; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$,

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}=\frac{(2x-7)\times 2(1-x)-\left(x^2-7x+10\right)\times(-2)}{\left(2(1-x)\right)^2}$$

$$=\frac{4x-4x^2-14+14x+2x^2-14x+20}{4(1-x)^2}=\frac{-2x^2+4x+6}{4(1-x)^2}=\frac{2\left(-x^2+2x+3\right)}{4(1-x)^2}.$$

En résumé $\boxed{f'(x)=\frac{2\left(-x^2+2x+3\right)}{4(1-x)^2}}$

12) $f(x)=(3x+2)^2$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)$ est de la forme $f(x)=\left(u(x)\right)^2$, où $u(x)=3x+2$ => $u'(x)=3$ on a alors :

$f'(x)=2u'(x)\times\left(u(x)\right)^{2-1}=2u'(x)\times u(x)$ donc $f'(x)=2\text{x}3\text{x}(3x+2)=18x+12$

On aurait pu commencer par développer l'expression $f(x)=9x^2+12x+4$ puis dériver cette expression comme une fonction polynôme $f'(x)=18x+12$.

On retrouve bien le même résultat !

13) $f(x)=(-5x+2)^7$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)$ est de la forme $f(x)=\left(u(x)\right)^7$, où $u(x)=-5x+2$ => $u'(x)=-5$ on a alors :

$f'(x)=7u'(x)\times\left(u(x)\right)^{7-1}=7u'(x)\times u(x)^6$ donc $f'(x)=7\times(-5)\times(-5x+2)^6=-35\times(-5x+2)^6$

14) $f(x)=\sqrt{3x-1}$

f est définie et dérivable sur $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ car la fonction u : x->$3x$-1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais on compose avec la fonction $X\rightarrow\sqrt{X}$ qui n'est dérivable que sur $\left]0;+\infty\right[$.

Or $3x-1\in\left]0;+\infty\right[$ <=> $x\in\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

Comme $f(x)$ est de la forme $f(x)=\sqrt{u(x)}$, où $u(x)=3x-1$ => $u'(x)=3$ on a alors $f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, c'est-à-dire : pour tout $x\in\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

15) $f(x)=8\sqrt{3-x}$

f est définie et dérivable sur $]-\infty;3[$ car la fonction u : x->$3-x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais on compose avec la fonction $X\to\sqrt{X}$ qui n'est dérivable que sur $]0;+\infty[$.

Or $3-x\in]0;+\infty[$ <=> $x\in]-\infty;3[$

Comme $f(x)$ est de la forme $f(x)=8\times\sqrt{u(x)}$, où $u(x)=3-x$ => $u'(x)=-1$ on a alors $f'(x)=8\times\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, c'est-à-dire :

Pour tout $x\in]-\infty;3[$ $f'(x)=8\times\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}=\frac{-4}{\sqrt{3-x}}$

16) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x+1}}$

f est définie et dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ car la fonction u : x->$2x+1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais on compose avec la fonction $X\to\sqrt{X}$ qui n'est dérivable que sur $]0;+\infty[$.

Or $2x+1\in]0;+\infty[$ <=> $x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Comme $f(x)$ est de la forme $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$, où $u(x)=x$ => $u'(x)=1$ et $v(x)=\sqrt{2x+1}$, donc $v'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ on en déduit que pour tout $x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

donc $f'(x)=\dfrac{1\times\sqrt{2x+1}-x\times\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}}{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}=\dfrac{\dfrac{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-x}{\sqrt{2x+1}}}{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}=\dfrac{2x+1-x}{\sqrt{2x+1}\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}$

donc $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{2x+1}\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}=\dfrac{x+1}{\sqrt{2x+1}\,(2x+1)}$

17) $f(x) = x\cos x - 2\sin x$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produits de fonctions qui le sont.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\underbrace{1\times\cos x+x\times(-\sin x)}_{\text{dérivée d'un produit}}-2\times\cos x=\cos x-x\sin x-2\cos x$ donc $f'(x) = -\cos x - x\sin x$

18) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

f est définie et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

Pour tout $x\in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ $f'(x)=\underbrace{\dfrac{(\cos x)\times x-(\sin x)\times 1}{x^2}}_{\text{dérivée d'un quotient}}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ donc $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

19) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$

Pour tout $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$,

$$f'(x)=\underbrace{\frac{(\cos x)\times(\cos x)-(\sin x)\times(-\sin x)}{(\cos x)^2}}_{\text{dérivée d'un quotient}}=\frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2}=\begin{cases}\dfrac{1}{(\cos x)^2}\\[2ex] 1+\dfrac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}=1+(\tan x)^2\end{cases}$$

20) $f(x)$ = cos3x-sin2x

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produits de fonctions qui le sont.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=3\times\left(-\sin(3x)\right)-2\times\left(\cos(2x)\right)=-3\sin(3x)-2\cos(2x)$ donc $f'(x)$ = -3sin(3x)-2cos(2x)