

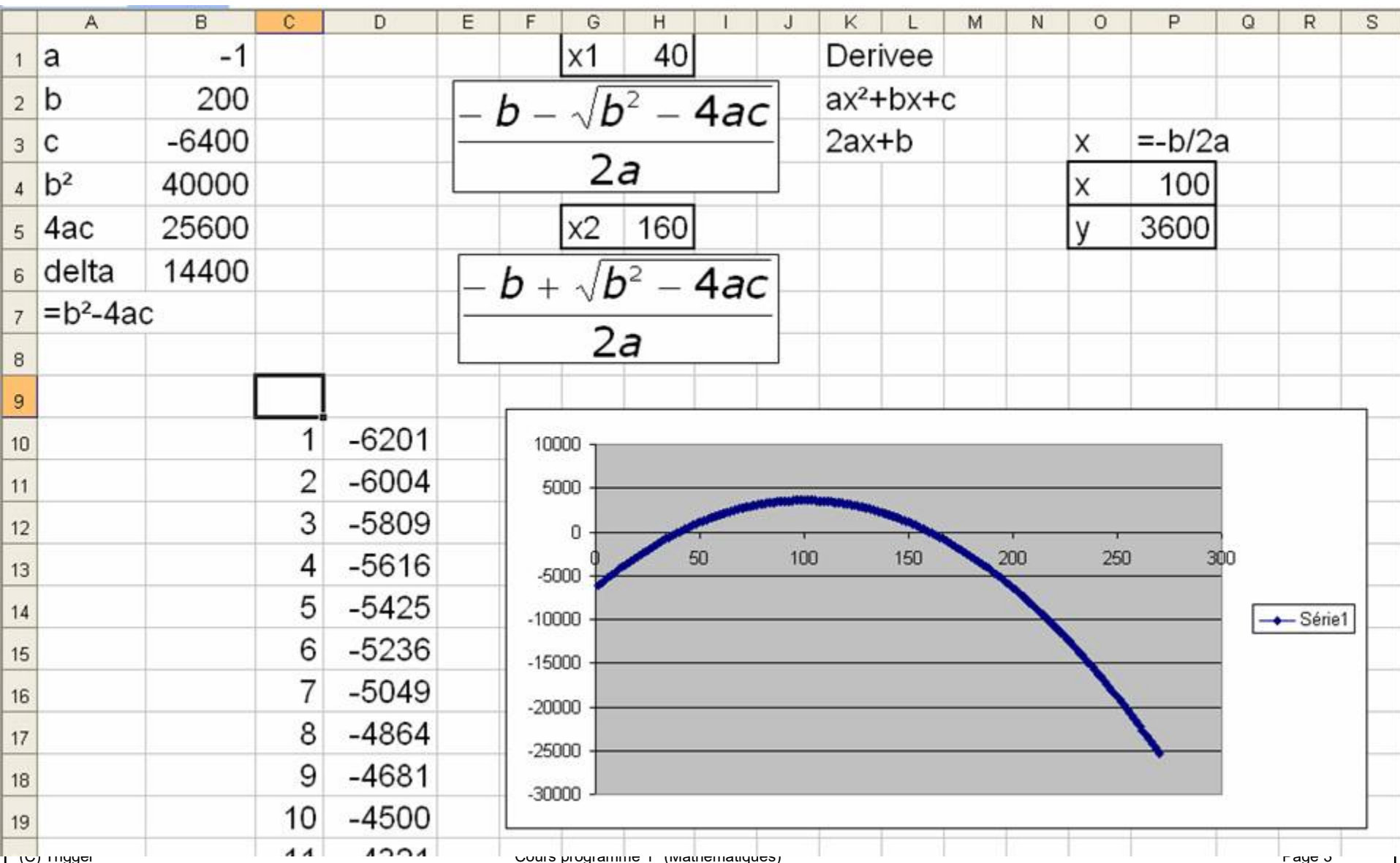
MATHÉMATIQUES

Exercices et Corrigés
Révisions
(Première)

Exercice No 1 (fonctions 2e degré et homographiques)

- *Le résultat brut R engendré par la création d'une nouvelle formation dans un Institut peut être exprimé selon le nombre z total d'inscriptions par la fonction suivante :*
- *$R(z) = -z^2 + 200z - 6400$ ou R est exprimé en k€*
- *a) Pour quel nombre d'inscriptions $z_{\max}$ ce résultat brut est-il maximal ?*
- *Quel est alors sa valeur ?*
- *Pour quel nombre d'inscriptions ce résultat est-il positif ?*

Corrigé exercice No 1



Rappel équations logarithmes et exponentielles

- Fonction logarithme

$$a^b = c \Leftrightarrow b = \ln_a c$$

- Base 10

$$10^b = c \Leftrightarrow b = \log c$$

- base e

$$e^b = c \Leftrightarrow b = \ln c$$

Exercice No 2 (équations logarithmes et exponentielles)

- *a) Résoudre l'équation :*
 - $2e^{2x} + 3e^x - 2 = 0$
- *b) Factoriser l'expression :*
 - $2e^{2x} + 3e^x - 2 = 0$
- *c) Résoudre l'équation*
 - $2(\log x)^2 + 3(\log x) - 2 = 0$

Corrigé exercice 2

On pose	$X = e^x$		
	$2X^2+3X-2$		
aprim	2	x1	0,5
bprim	3	$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
cprim	-2		
bprim ²	9		
4*aprim*cprim	-16	x2	-2
deltaprim =b ² -4ac	25	$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
Retour à x			
X=-2	$e^x = -2$	Sans solution	
X=0,5	$e^x = 0,5$	x=ln 1/2	x=-ln 2

Corrigé exercice 2

- $2e^{2x} + 3e^x - 2$
- $2x^2 + 3x - 2$
- $= 2(x+2)(x-1/2)$
- $2(e^x+2)(e^x-1/2)$

Corrigé exercice 2

On pose	$\log x = X$		
	$2X^2 + 3X - 2$		
ater	2	x_1	0,5
bter	3	$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
cter	-2		
bter ²	9	$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
4*ater*cter	-16		
deltater	25	x_2	-2
=b ² -4ac			
Retour à x			
X=-2	$\log x = -2$	$x = 10^{-2}$	$x = 0,01$
X=0,5	$\log x = 0,5$	$x = 10^{0,5}$	$x = \sqrt{10}$

Exercice No 3 (fonctions, logarithmes et exponentielles)

- *Etudier la fonction*
- $f(x) = \ln(2x+1) - x - 0,05$
- *où x est une variable réelle*
- *La fonction modélisant le résultat journalier $R(q)$, exprimé en 10^5 € et en fonction du nombre q de milliers de kilogrammes de poissons frais vendus, lors du 2e semestre dans un supermarché s'écrit $R(q) = \ln(2q+1) - q - 0,05$*
- *Déduire de l'étude de la fonction*
- *Le nombre de kilos de poissons qu'il faut vendre chaque jour pour maximiser le résultat journalier*
- *La valeur maximale du résultat journalier (approx centaine d'€)*

Rappel fonctions, logarithmes et exponentielles

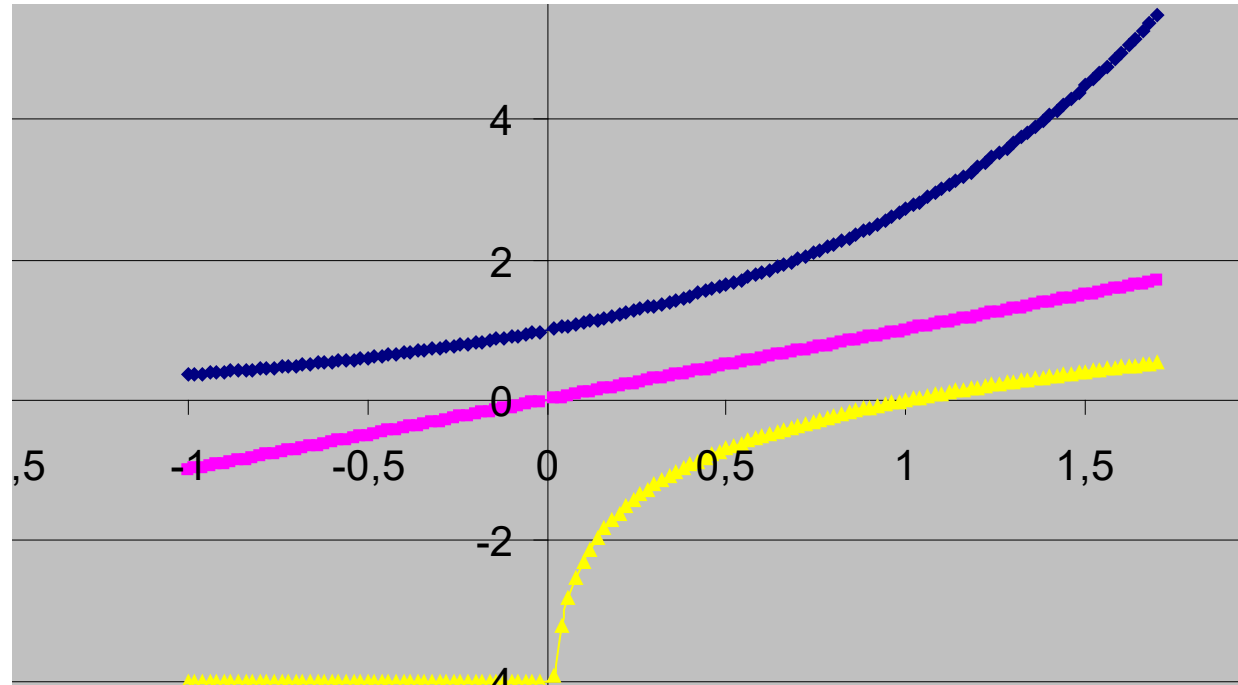
- a^x : exponentielle en base a de x

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

- Base e
- e est un réel 2,718281828
- e est la seule base pour laquelle la fonction exponentielle est égale à sa dérivée
- $f(x) = a^x$
- $f'(x) = (\ln a) * a^x$

Rappel fonctions, logarithmes et exponentielles



$$y = \exp(x)$$
$$y = x$$
$$y = \ln(x)$$

Corrigé fonctions, logarithmes et exponentielles

- $f(x) = \ln(2x+1) - x - 0,05$
- Le domaine de définition $2x+1 > 0 \Rightarrow D =]-1/2, +\infty]$
- $x \rightarrow -1/2 \quad 2x-1 \rightarrow 0+ \quad \ln(2x-1) \rightarrow -\infty$
- $-x \rightarrow 1/2 \quad \ln(2x-1) - x - 0,05 \rightarrow -\infty$
- $x \rightarrow \infty \quad 2x-1 \rightarrow \infty \quad \ln(2x-1) \rightarrow \infty$
- $-x \rightarrow -\infty$ (beaucoup plus vite)
- $\ln(2x-1) - x - 0,05 \rightarrow -\infty$

Corrigé fonctions, logarithmes et exponentielles

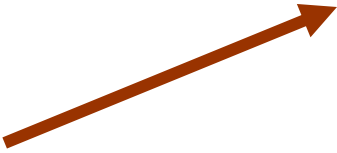
- $f(x) = \ln(2x+1) - x - 0,05$
- Le domaine de définition $2x+1 > 0 \Rightarrow D =]-1/2, +\infty]$

$$f'(x) = \frac{2}{2x+1} - 1 = \frac{-2x+1}{2x+1}$$

- $x < 1/2 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ fonction croissante
- $x > 1/2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ fonction décroissante
- $x = 1/2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$ maximum $f(1/2) = 0,143$

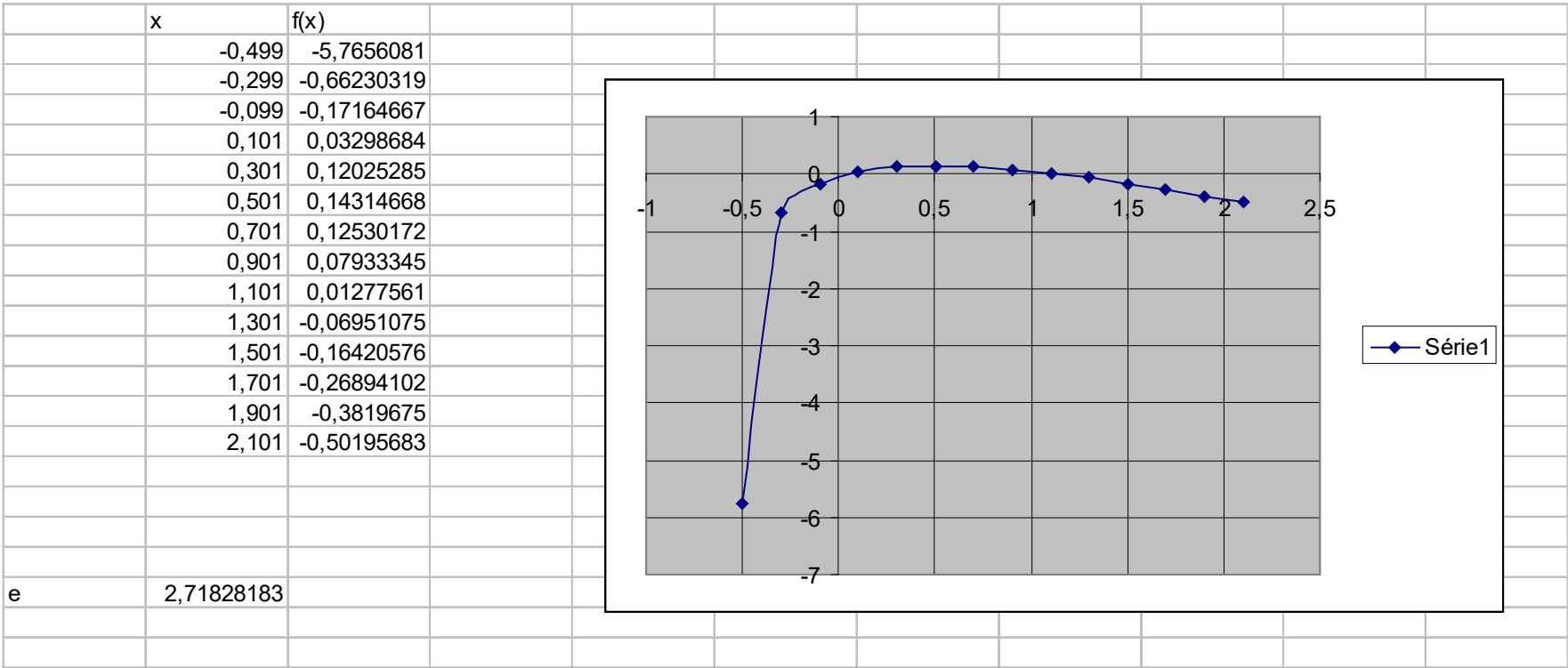
Corrigé fonctions, logarithmes et exponentielles

- $f(x)=\ln(2x+1)-x-0,05$
- Le domaine de définition $2x+1>0 \Rightarrow D=]-1/2,+\infty]$

x	-1/2	1/2	$+\infty$
f'(x)	+ 0 -		
f(x)	$-\infty$  $f(1/2)=0,143$  $-\infty$		

Corrigé fonctions, logarithmes et exponentielles

- $f(x)=\ln(2x+1)-x-0,05$
- Le domaine de définition $2x+1>0 \Rightarrow D=]-1/2,+\infty]$



Corrigé fonctions, logarithmes et exponentielles

- Profit max pour $x=1/2 \Rightarrow 500$ kg de poissons
- Le profit est alors égal à 14 300 €

Exercice No 4 (suites)

- *Un emprunt d'un montant K est remboursable au moyen de 10 annuités constantes, au taux d'intérêts composés $i = 5\%$*
- *Le montant du premier amortissement est égal à 1000 €*
- *Sachant que, pour ce type d'emprunt, les amortissements sont en progression géométrique de raison $(1+i)$ déterminer :*
 - *a) Le montant du 6e amortissement*
 - *b) Le montant de l'emprunt*

Corrigé exercice 4

		MODE DE CALCUL DIRECT
taux	5,00%	
		$A_6 = A_1 * (1 + i)^5$
1 000,00 €	1	
1 050,00 €	2	
1 102,50 €	3	=1000*(puissance(1+taux;5))
1 157,63 €	4	
1 215,51 €	5	1 276,28 €
1 276,28 €	6	
1 340,10 €	7	
1 407,10 €	8	$K = A_1 * \frac{(1 + i)^{10} - 1}{(1 + i) - 1}$
1 477,46 €	9	
1 551,33 €	10	
12 577,89 €		
		=1000*(Puissance((1+taux);10)-1)/(1+taux-1)
		12 577,89 €

Exercice No 9 (statistiques descriptives)

- Une entreprise de ventes par correspondance résume dans le tableau ci-dessous les temps de livraison de 1000 colis

					De 2 semaines à moins de 4 semaines	De 4 semaines à moins de 10 semaines
Durée	Moins de 2 jours	De 2 jours à moins de 4 jours	De 4 jours à moins de 7 jours	De 7 jours à		
Nombre de colis	150	220	300	120	140	70

- La variable statistique étant ici, le temps de livraison en jours d'un colis, présenter le tableau pour que l'étude de la variable se ramène à celle d'une variable continue sur l'intervalle $[0;70]$

Exercice No 9 (statistiques descriptives)

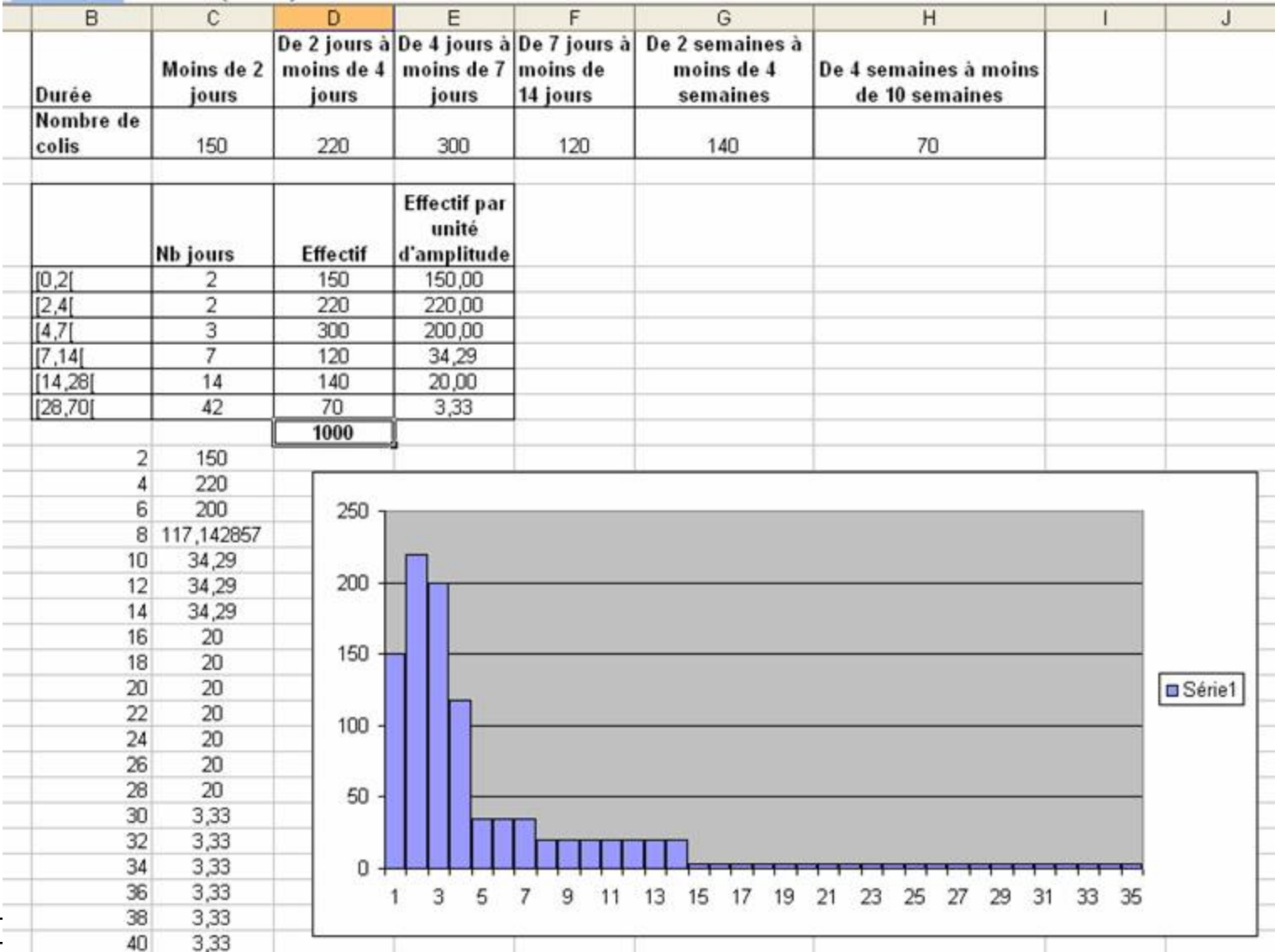
- *a) Tracer l'histogramme des effectifs*
- *b) Quel temps moyen le client devra-t-il attendre son colis ?*
- *c) Calculer l'écart-type et la médiane de cette série*
- *d) Lors d'une précédente étude portant sur 2000 colis, le temps de livraison moyen était de 5,62 j. Calculer le temps moyen de livraison de l'ensemble des 3000 colis (2000 étude #1 + 1000 étude #2).*

Rappel statistiques descriptives

- Population
- Classe (amplitude, centre classe)
- Mode
- Moyenne arithmétique pondérée
- Médiane
- Quartiles
- Variance
- Ecart type

Exercice No 9 (statistiques descriptives)

- Tracer l'histogramme des effectifs



Exercice No 9 (statistiques descriptives)

- Ecart type

Durée	Moins de 2 jours	De 2 jours à moins de 4 jours	De 4 jours à moins de 7 jours	De 7 jours à moins de 14 jours	De 2 semaines à moins de 4 semaines	De 4 semaines à moins de 10 semaines
Nombre de colis	150	220	300	120	140	70

	Effectif	borne inf	borne sup	centre classe	effectif*centre classe
[0,2[	150	0	2	1	150
[2,4[	220	2	4	3	660
[4,7[	300	4	7	5,5	1650
[7,14[	120	7	14	10,5	1260
[14,28[	140	14	28	21	2940
[28,70[	70	28	70	49	3430
	1000				10090

Moyenne	sigma(nixi ²)	254245
10,09	1/n*sigma(nixi ²)	254,245
Moyenne carrée	1/n*sigma(nixi ²)-moy ²	152,4369
101,8081	ecart tpe	12,35

	Effectif	centre classe	centre classe au carré xi ²	xi ² *n	
[0,2[	150	1	1	150	
[2,4[	220	3	9	1980	
[4,7[	300	5,5	30,25	9075	
[7,14[	120	10,5	110,25	13230	
[14,28[	140	21	441	61740	
[28,70[	70	49	2401	168070	
	1000			254245	

Exercice No 9 (statistiques descriptives)

Moyenne
10,09
Moyenne
carrée
101,8081

$\sigma(\text{nixi}^2)$ 254245
 $1/n \cdot \sigma(\text{nixi}^2)$ 254,245
 $1/n \cdot \sigma(\text{nixi}^2) - \text{moy}^2$ 152,4369
ecart tpe **12,35**

	Effectif	centre classe	centre classe au carré xi^2	$\text{xi}^2 \cdot n$	
[0,2[	150	1	1	150	
[2,4[	220	3	9	1980	
[4,7[	300	5,5	30,25	9075	
[7,14[	120	10,5	110,25	13230	
[14,28[	140	21	441	61740	
[28,70[	70	49	2401	168070	
	1000			254245	

Exercice No 9 (statistiques descriptives)

- Mediane

Durée	Moins de 2 jours	De 2 jours à moins de 4 jours	De 4 jours à moins de 7 jours	De 7 jours à moins de 14 jours	De 2 semaines à moins de 4 semaines	De 4 semaines à moins de 10 semaines
Nombre de colis	150	220	300	120	140	70

	Effectif	borne inf	borne sup	centre classe	effectif*centre classe	cumul
[0,2[	150	0	2	1	150	150
[2,4[	220	2	4	3	660	370
[4,7[	300	4	7	5,5	1650	670
[7,14[	120	7	14	10,5	1260	
[14,28[	140	14	28	21	2940	
[28,70[	70	28	70	49	3430	
	1000				10090	

Mediane ici (500)

Mediane $=4+(500-370)*3/300$
 5,30

Exercice No 9 (statistiques descriptives)

- Temps moyen sur 3000 colis

$$\bar{X} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2}{n_1 + n_2} = \frac{10,09 * 1000 + 5,62 * 2000}{3000}$$

- 7,11 jours

Exercice No 10 (ajustement linéaire)

- *En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société effectue une enquête pour en fixer le prix unitaire.*
- *Le tableau ci-dessous indique pour un prix donné le nombre d'acheteurs potentiels*

Prix en Euros : x_i	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'acheteurs potentiels y_i	130	120	100	80	70	60	30	20

Exercice No 10 (ajustement linéaire)

- *Représenter le nuage de points $M(x,y)$ dans un repère orthogonal (point $(5,0)$ pour origine avec 2 cm pour un euro en abscisses et 1 cm pour 10 acheteurs en ordonnées*
- *a) Déterminer les coordonnées de G le point moyen du nuage, et le placer dans le repère*
- *b) Déterminer une équation du type $y = ax + b$ de la droite de régression de y en x : $D y/x$*
- *(a sera arrondi à l'unité près et b à 10^{-1} près par défaut)*
- *Tracer D*

Rappel ajustement linéaire

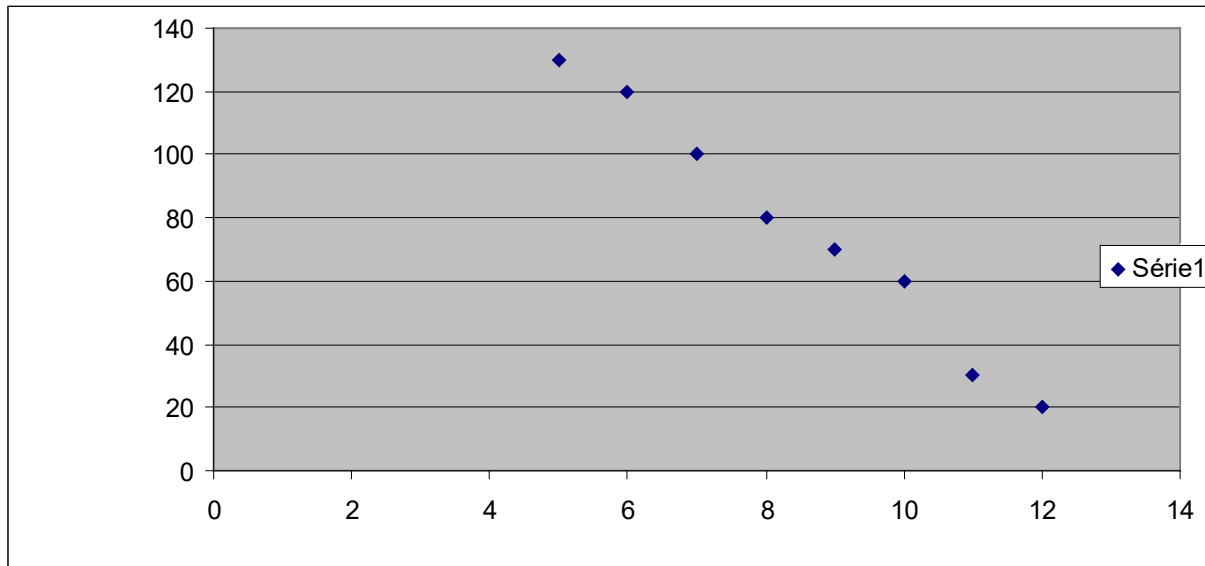
- Droite d'ajustement de Y en X

$$a = \frac{\text{Cov}(X_i, Y)}{V(X_i)}$$

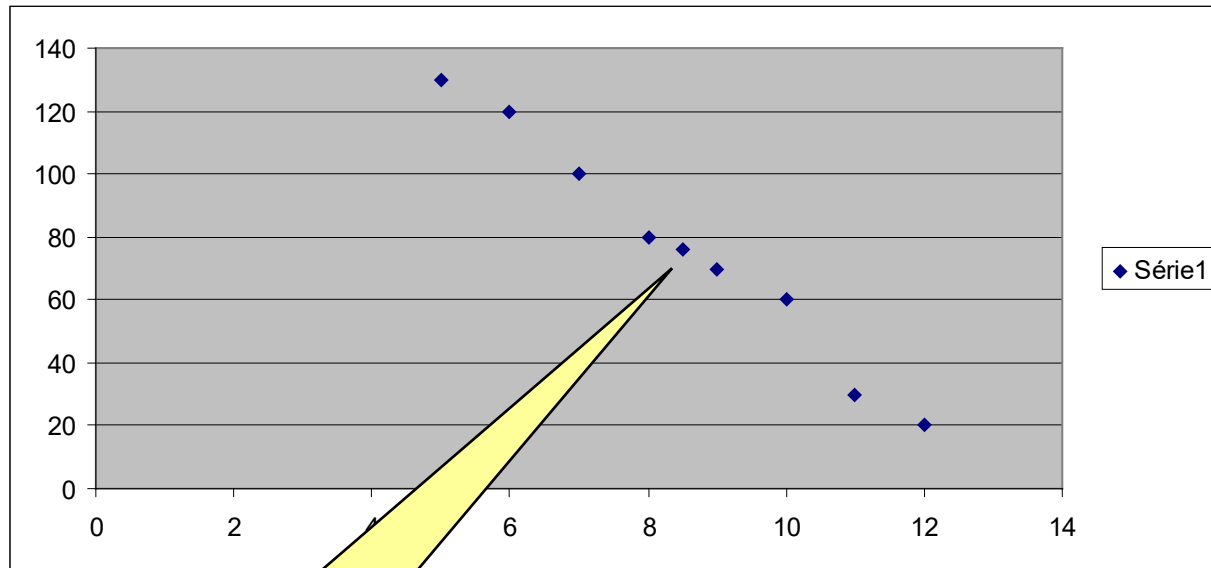
$$b = \bar{Y} - a\bar{X}_i$$

- On rappelle que la covariance est la moyenne des produits des écarts pour chaque série d'observation

Correction exercice No 10

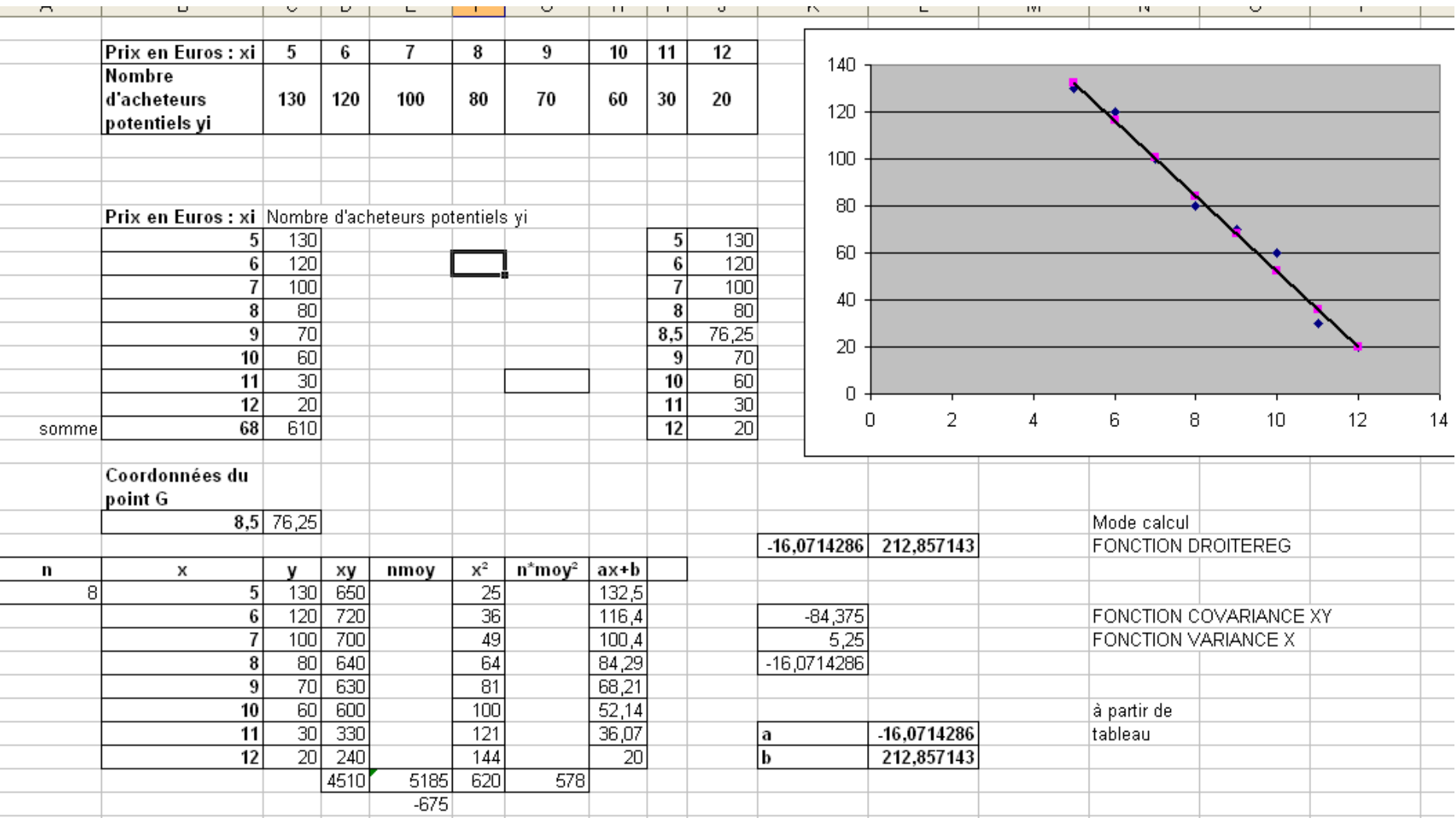


Correction exercice No 10



Point G

Correction exercice No 10



Exercice No 11 (ajustement linéaire)

- Monsieur D., directeur d'un centre de formation, ouvre les inscriptions pour une nouvelle formation. Il relève le nombre d'inscriptions effectuées chaque jour ouvrable de la première semaine d'inscriptions et il obtient le tableau suivant :*

x: No de jour	y : nb inscriptions
1	25
2	19
3	16
4	12
5	10
6	8

Exercice No 11 (ajustement linéaire)

- 1. Représenter les couples (x, y) dans un repère orthogonal et expliquez pourquoi un ajustement linéaire sur les variables x et y n'est pas approprié
- 2. Déterminez les valeurs prises par la variable $Y = \log y$ (résultats au 1/100)
 - Une représentation dans un repère orthogonal des couples (x, Y) montre que ceux-ci sont presque alignés. Aussi M. D. décide-t-il d'effectuer un ajustement linéaire sur les variables x et Y
 - Déterminer l'équation de la droite des moindres carrés de Y en x
 - Dédire de la liaison entre Y et x obtenue l'équation liant y à x

Exercice No 11 (ajustement linéaire)

- *On pourra utiliser certains des résultats suivants*

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 21 \quad \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 91$$

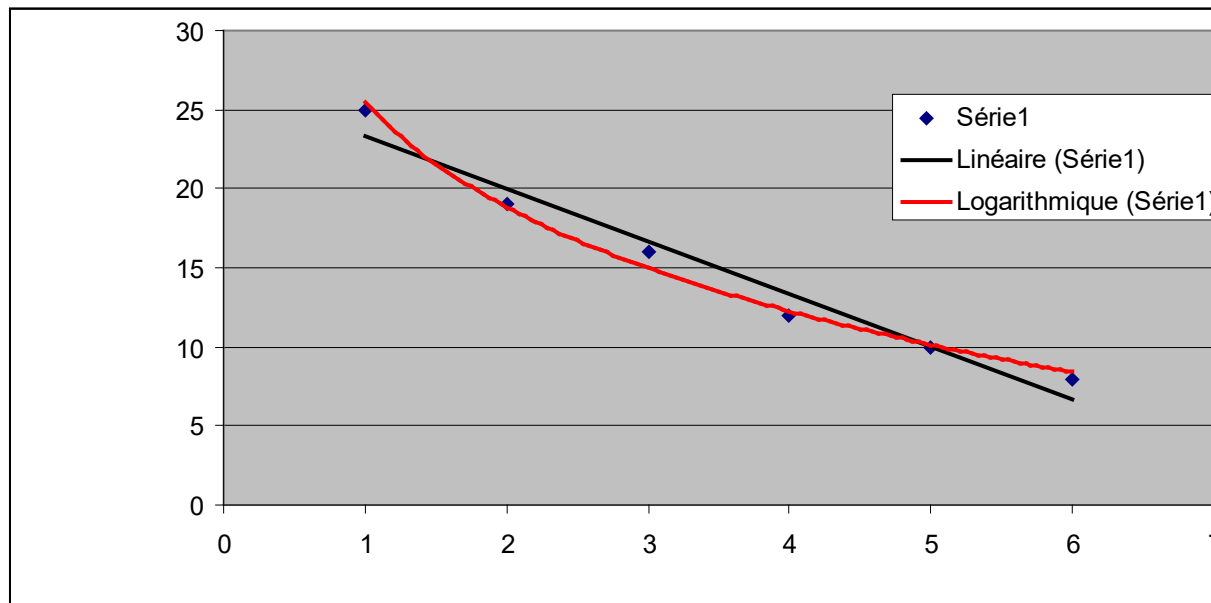
$$\sum_{i=1}^6 y_i = 90 \quad \sum_{i=1}^6 y_i^2 = 1550$$

$$\sum_{i=1}^6 Y_i = 6,86 \quad \sum_{i=1}^6 Y_i^2 = 8,01$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i y_i = 257 \quad \sum_{i=1}^6 x_i Y_i = 22,28$$

Exercice No 11 (ajustement linéaire)

- L'ajustement linéaire n'est pas approprié
- Un autre ajustement semble plus approprié (ajustement rouge donné pour exemple : ajustement automatique logarithmique d'Excel)

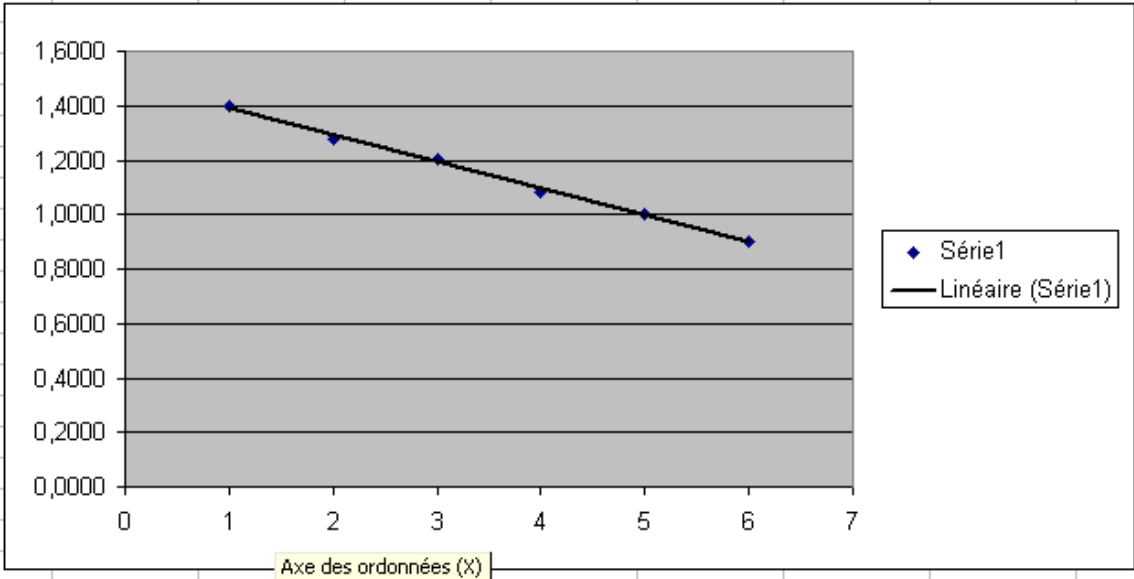


Exercice No 11 (ajustement linéaire)

- Ajustement logarithmique

x: No de jour	y : nb inscriptions	log y
1	25	1,3979
2	19	1,2788
3	16	1,2041
4	12	1,0792
5	10	1,0000
6	8	0,9031

a	b
-0,098155704	1,487392436



Exercice No 12 (statistiques descriptives)

- *On analyse l'age des individus d'un groupe de 380 personnes. Le tableau suivant donne les résultats de l'enquête*

Age	y : nb inscriptions
[16-20[	160
[20-22[	100
[22-30[	120

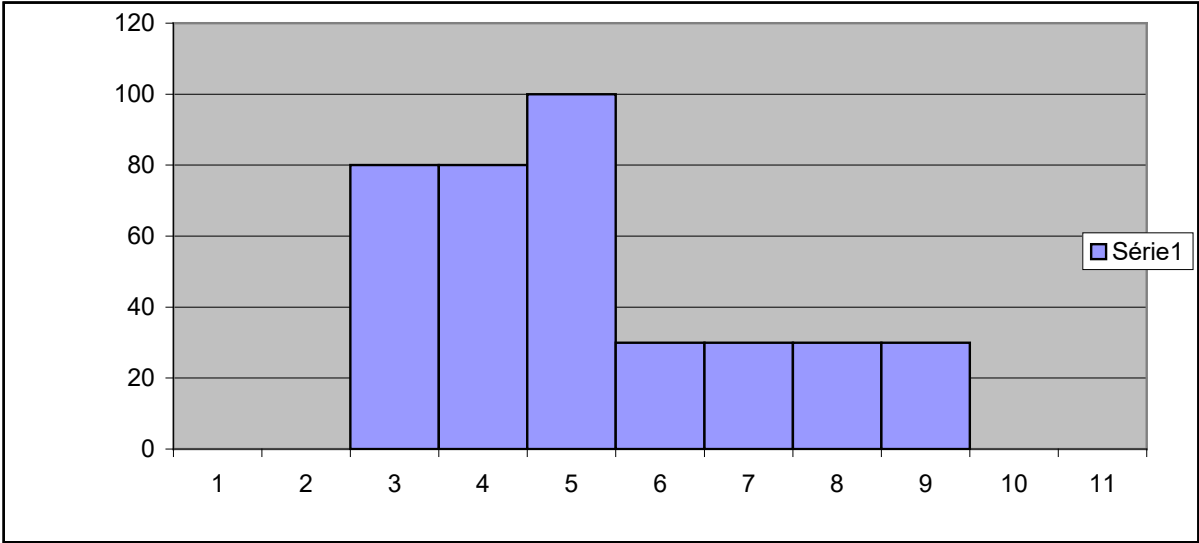
- *Représenter graphiquement la série*
- *Construire la courbe des effectifs cumulés croissants*
- *Calculer l'age modal, l'age médian et l'age moyen*
- *Calculer les quartiles de cette série*
- *Vérifier graphiquement les valeurs obtenues par les quartiles*
- *Calculer l'intervalle interquartile, l'écart-type*

Corrigé exercice No 12

- Représentation graphique de la série

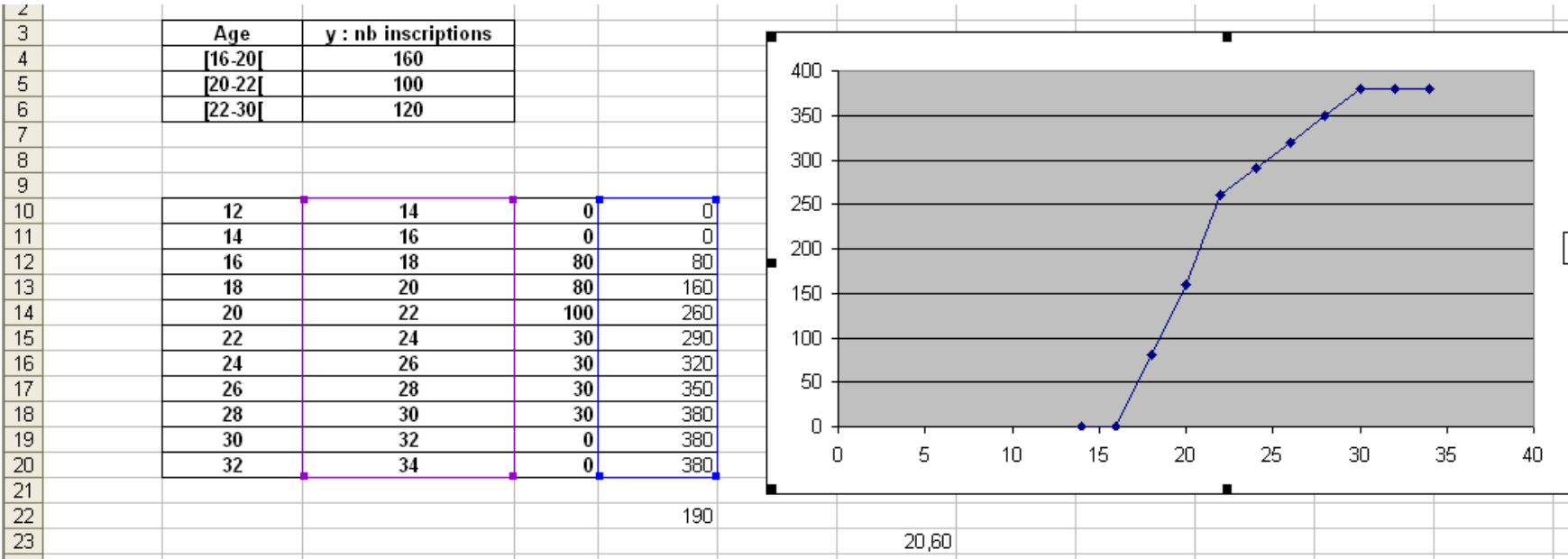
Age	y : nb inscriptions
[16-20[	160
[20-22[	100
[22-30[	120

12	14	0
14	16	0
16	18	80
18	20	80
20	22	100
22	24	30
24	26	30
26	28	30
28	30	30
30	32	0
32	34	0



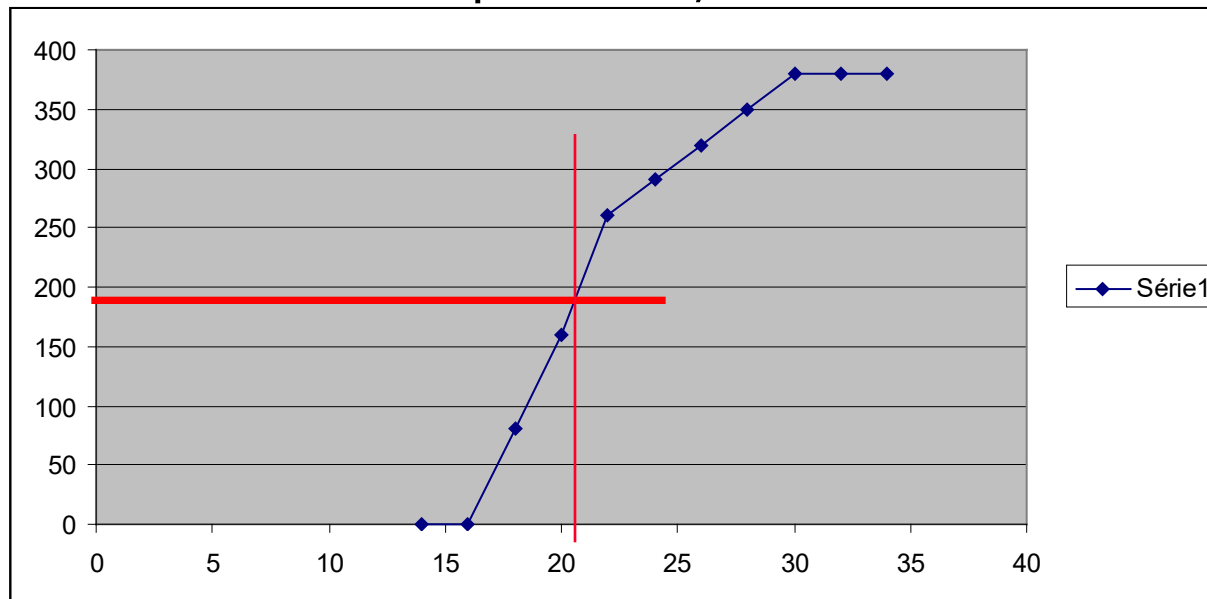
Corrigé exercice No 12

- Courbe des effectifs cumulés croissants



Corrigé exercice No 12

- Calcul age modal, age médian et age moyen
- Age modal : age pour lequel l'effectif par unité d'amplitude est le plus élevé : classe modale [20;22]
- Médiane : [20,22[Moitié de 380 = 190
- $M = 20 + 2 \cdot 30 / 100 = 20,6$
- On peut vérifier que la droite $n=190$ coupe la courbe des effectifs cumulés au point 20,6



Corrigé exercice No 12

- Calcul moyenne

Centre classe	Debut classe	Fin classe	Effectif	Cumul	n*x
13	12	14	0	0	0
15	14	16	0	0	0
17	16	18	80	80	1360
19	18	20	80	160	1520
21	20	22	100	260	2100
23	22	24	30	290	690
25	24	26	30	320	750
27	26	28	30	350	810
29	28	30	30	380	870
31	30	32	0	380	0
33	32	34	0	380	0
Moy					8100
					21,32

Corrigé exercice No 12

- $Q1 = 18,375$
- $Q2 = \text{Médiane} = 20,6$
- $Q3 = 23,67$
- Intervalle inter-quartile = $Q3 - Q1 = 5,295$
- Variance = $11,58$
- Ecart type = $3,4$

Exercice No 17 (suites)

- *On considère que l'équation liant le nombre d'inscriptions chaque jour dans un centre de formation en fonction du numéro x du jour peut être modélisé par la fonction*

$$y = f(x) = 30 * 0,8^x$$

- *Etudier la fonction sur l'ensemble des nombres réels*
- *Soient les nombres $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_8$ d'inscription aux 1^{er}, 2^e, ..., i^e, ..., 8^e jours*
- *Caractériser la suite des y_i en précisant le type de la suite, le nombre de termes, la raison de la progression, la valeur du premier terme*
- *Combien d'inscriptions comptera-t-on pour cette formation à l'issue des 8 jours d'inscriptions.*

Corrigé exercice No 17

- La fonction

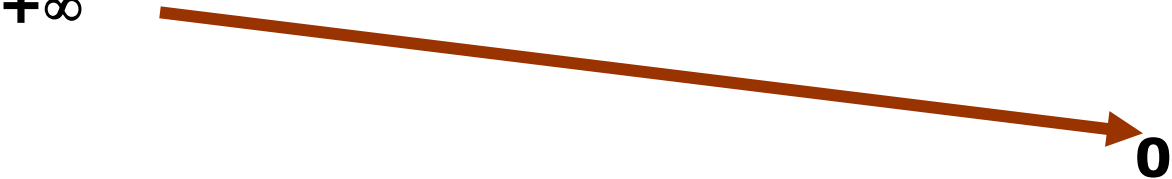
$$y = f(x) = 30 * 0,8^x$$

- est une fonction exponentielle de base 0,8
- définie de $-\infty$ à $+\infty$
- Limites
 - $x \rightarrow \infty \quad y \rightarrow 0$
 - $x \rightarrow -\infty \quad y \rightarrow \infty$
- Dérivée
- $f'(x) = 30 * \ln 0,8 * 0,8^x$
- Toujours décroissant

Corrigé exercice No 17

- La fonction

$$y = f(x) = 30 * 0,8^x$$

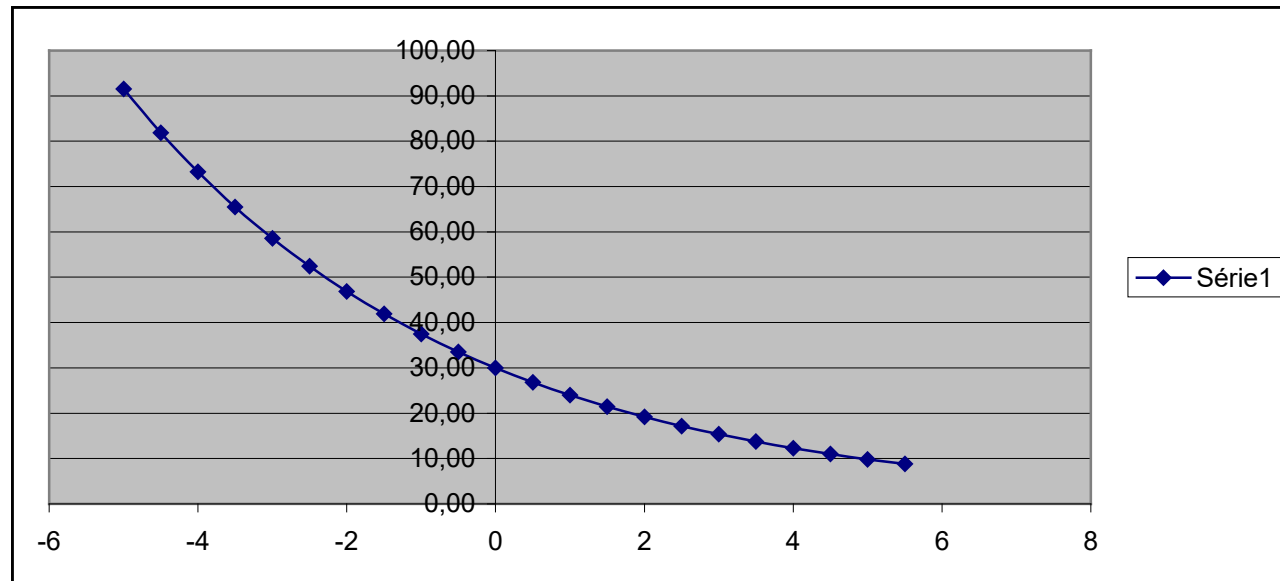
x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	-	
f(x)		

Corrigé exercice No 17

- La fonction

$$y = f(x) = 30 * 0,8^x$$

x	f(x)
-5	91,55
-4,5	81,89
-4	73,24
-3,5	65,51
-3	58,59
-2,5	52,41
-2	46,88
-1,5	41,93
-1	37,50
-0,5	33,54
0	30,00
0,5	26,83
1	24,00
1,5	21,47
2	19,20
2,5	17,17
3	15,36
3,5	13,74
4	12,29
4,5	10,99
5	9,83
5,5	8,79



Corrigé exercice No 17

- Nature de la suite des y_i
- $y_i = 30 * 0,8^i$
- $y_i = 30 * 0,8^{i+1}$

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = \frac{30 * 0,8^{i+1}}{30 * 0,8^i} = 0,8$$

- Le rapport entre 2 termes consécutifs de la suite est une constante, la suite des y_i est donc une suite géométrique de raison 0,8. Cette progression compte 8 termes, le premier est $y_1 = 30 * 0,8^1 = 24$

Corrigé exercice No 17

- On utilise la formule la formule de la somme des 8 premiers termes d'une suite géométrique de raison 0,8

$$S = y_1 \frac{0,8^8 - 1}{0,8 - 1} = 100$$

- Soit 100 inscriptions à l'issue des 8 jours d'inscription

Exercice No 18 (fonctions, log et exp)

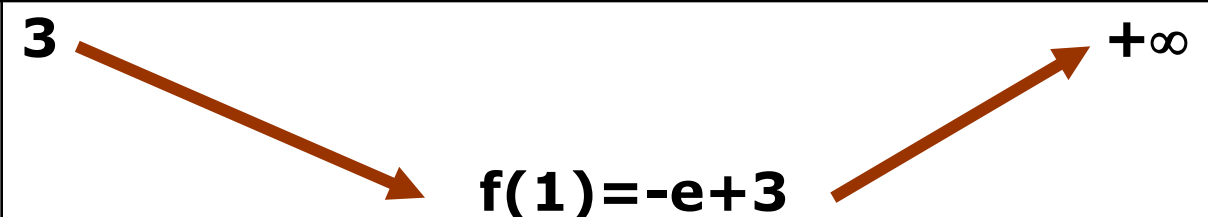
- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par
- $f(x) = (x-2)e^x + 3$
- Soit C la représentation graphique
- Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$
- Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$
- Soit D la droite d'équation $y=3$. Etudier les positions relatives de C et de D
- Calculer $f'(x)$
- Dresser le tableau de variation de f
- En déduire, en fonction du nombre réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$

Corrigé exercice No 18

- La fonction
- $f(x) = (x-2)e^x + 3$
- définie de $-\infty$ à $+\infty$
- Limites
 - $x \rightarrow \infty \quad y \rightarrow \infty$
 - $x \rightarrow -\infty \quad y \rightarrow 3$
- Dérivée
- $f'(x) = (x-2)e^x + 1 * e^x = e^x(x-1)$

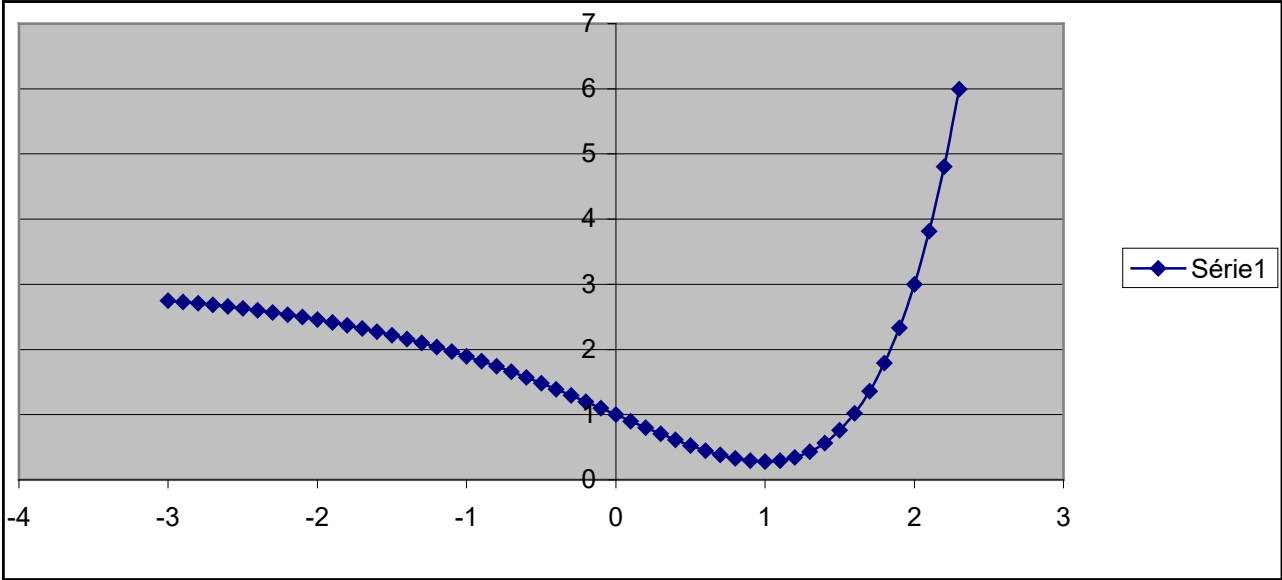
Corrigé exercice No 18

- La fonction
- $f(x)=(x-2)e^x+3$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
f'(x)		- 0 +	
f(x)	3		

Exercice No 18 (fonctions, log et exp)

x	f(x)
-3	2,75106466
-2,9	2,73038622
-2,8	2,7081117
-2,7	2,68413409
-2,6	2,65834154
-2,5	2,63061751
-2,4	2,60084101
-2,3	2,56888697
-2,2	2,53462673
-2,1	2,49792864
-2	2,45865887
-1,9	2,41668239
-1,8	2,37186422
-1,7	2,32407096
-1,6	2,27317254
-1,5	2,21904444
-1,4	2,16157032
-1,3	2,10064508
-1,2	2,03617852
-1,1	1,96809964
-1	1,89636168
-0,9	1,82094799
-0,8	1,7418789
-0,7	1,65921968
-0,6	1,57308975
-0,5	1,48367335
-0,4	1,39123189
-0,3	1,29611809
-0,2	1,19879234



Corrigé exercice No 18

- Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ est égal au nombre de points d'intersections entre la courbe représentative de f et la droite horizontale d'équation $y=m$