CORRECTION du Brevet Blanc de Mathématiques (mars 2008)

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES (13,5 points) :

EXERCICE 1 : *Calculer la valeur exacte de A et B en détaillant les calculs sur la copie :*

$A = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \div \frac{4}{25}$

$A = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{25}{4}$

$A = \frac{3}{5} - \frac{\cancel{2}\times5\times5}{5\times\cancel{2}\times2}$

$A = \frac{3}{5} - \frac{25}{10}$

$A = \frac{6}{10} - \frac{25}{10}$

$\boxed{\mathbf{A = \frac{-19}{10}}}$

$B = \frac{5\times10^{-4}}{15\times10^{5}} \times10^{10}$

$B = \frac{5}{3\times5}\times10^{-4+10-5}$

$\boxed{\mathbf{B = \frac{1}{3}\times10}}$ $\left(= \frac{10}{3}\right)$

EXERCICE 2 : *On donne les trois nombres suivants :*

$C = \sqrt{200} - 4\sqrt{3} \times\sqrt{6}$

a) Ecrire C sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un entier.

$C = \sqrt{2\times100} - 4\sqrt{3\times6}$

$C = 10\sqrt{2} - 4\sqrt{18}$

$C = 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2\times9}$

$C = 10\sqrt{2} - 4\times3\sqrt{2}$

$C = 10\sqrt{2} - 12\sqrt{2}$

$\boxed{\mathbf{C = -2\sqrt{2}}}$

$D = \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)^2$

b) Développer et réduire D .

$D = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\times\sqrt{3}\times\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2$

$D = 3 - 2\sqrt{15} + 5$

$\boxed{\mathbf{D = 8 - 2\sqrt{15}}}$

$E = \left(7\sqrt{2} + 4\right)\left(7\sqrt{2} - 4\right)$

c) Montrer que E est un nombre entier

$E = (7\sqrt{2})^2 - (4)^2$

$E = 98 - 16$

$\boxed{\mathbf{E = 82}}$

E est donc un nombre entier.

EXERCICE 3 : *Résoudre chaque équation :*

$\frac{x}{3} = \frac{27}{2}$

$x = \frac{3\times27}{2}$

$\boxed{\mathbf{x = \frac{81}{2}}}$

$5y + 4 = 3y - \frac{2}{5}$

$5y - 3y = -\frac{2}{5} - 4$

$2y = -\frac{2}{5} - \frac{20}{5}$

$2y = -\frac{22}{5}$

$y = -\frac{22}{5} : 2$

$y = -\frac{22}{5}\times\frac{1}{2}$

$y = -\frac{22}{5}\times\frac{1}{2}$

$y = -\frac{2\times11}{5\times2}$

$\boxed{\mathbf{y = -\frac{11}{5}}}$

$(2t + 3)^2 - 4 = 0$

$(2t + 3)^2 - 2^2 = 0$

$\left[(2t + 3) - 2\right]\left[(2t + 3) + 2\right] = 0$

$\left(2t + 1\right)\left(2t + 5\right) = 0$

C'est une équation produit. Un produit est nul si l'un au moins de ses facteurs est nul donc :

$2t + 1 = 0$ ou $2t + 5 = 0$

$2t = -1$ $\quad$ $2t = -5$

$t = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $t = -\frac{5}{2}$

Cette équation admet deux solutions :

$\boxed{\mathbf{-\frac{1}{2} \text{ et } -\frac{5}{2}}}$

EXERCICE 4 : *On considère l' expression :* $F = \left(4x + 1\right)^2 + \left(3x + 8\right)\left(4x + 1\right)$

1) *Développer et réduire l' expression F .*

$F = \left(4x + 1\right)^2 + \left(3x + 8\right)\left(4x + 1\right)$

$F = (4x)^2 + 2\times4x\times1 + 1^2 + 3x\times4x + 3x\times1 + 8\times4x + 8\times1$

$F = 16x^2 + 8x + 1 + 12x^2 + 3x + 32x + 8$

$\boxed{\mathbf{F = 28x^2 + 43x + 9}}$

2) *Factoriser l'expression F .*

F = $\left(\underline{4x+1}\right)^2 + (3x+8)\left(\underline{4x+1}\right)$ le facteur commun est $(4x+1)$

F = $(4x+1)\left[(4x+1)+(3x+8)\right]$

$\boxed{\mathbf{F = (4x+1)(7x+9)}}$

3) *Résoudre l' équation* $(4x+1)(7x+9) = 0$

C'est une équation produit. Un produit est nul si l'un au moins de ses facteurs est nul donc :

$4x + 1 = 0$ ou $7x + 9 = 0$

$x = -\frac{1}{4}$ $\quad$ $x = -\frac{9}{7}$

L'équation admet 2 solutions : $\boxed{\mathbf{-\frac{1}{4}\ et\ -\frac{9}{7}}}$.

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES (13 points) :

EXERCICE 1 :

SABCD est une pyramide à base rectangulaire ABCD de hauteur [SA].
On donne SA = 15 cm , AB = 8 cm et BC = 11 cm.

1) *Calculer le volume $\mathcal{V}_1$ de la pyramide SABCD. (valeur exacte)*

$$\boxed{\mathcal{V}_1 = \frac{A_{base}\times hauteur}{3} = \frac{AB\times BC\times SA}{3} = \frac{8\times 11\times 15}{3} = \mathbf{440\ cm^3}}$$

2) *Démontrer que SB = 17 cm.*

Dans le triangle SAB rectangle en A, appliquons le théorème de Pythagore :

$SB^2 = SA^2 + AB^2$
$SB^2 = 15^2 + 8^2$
$SB^2 = 289$

Donc $SB = \sqrt{289} = 17$: **le segment [BC] mesure 17 cm**.

3) a) *Section à compléter **sur la feuille annexe jointe**.*

b) *Quel est le coefficient de réduction ?*

$k = \frac{SF}{SB} = \frac{13,6}{17} = \frac{4}{5} = 0,8$; $\boxed{k = \frac{4}{5} = 0,8}$

En déduire le volume $\mathcal{V}_2$ de la pyramide réduite : $\boxed{\mathcal{V}_2 = 440 \times 0,8^3 = \mathbf{225,28\ cm^3}}$

EXERCICE 2 :

1) *Tracé du triangle en vraie grandeur* à l'emplacement réservé de ***la feuille annexe jointe***.

2) *Démontrer que le triangle IJK est rectangle en I.*

Le côté le plus long est JK. Calculons séparément JK^2 et $IJ^2 + IK^2$:
$JK^2 = 10,4^2 = 108,16$
$IJ^2 + IK^2 = 9,6^2 + 4^2 = 108,16$
On remarque que $JK^2 = IJ^2 + IK^2$. En appliquant la **réciproque du théorème de Pythagore**, on peut conclure que **IJK est un triangle rectangle en I**.

3) *Déterminer la tangente de l'angle $\widehat{IKJ}$* : en déduire la *valeur arrondie au degré* près de la mesure *de l'angle $\widehat{IKJ}$.*

Dans le triangle IJK rectangle en I, $\mathbf{\tan \widehat{IKJ}} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{IJ}{IK} = \frac{96}{40} = \mathbf{2,4}$

Donc, $\mathbf{\widehat{IKJ} = 67°}$ **à 1° près.**

4) a) *Démontrer que les droites (MN) et (JK) sont parallèles .*

Les droites (KN) et (JM) sont sécantes en I. **Calculons séparément** les quotients $\frac{IM}{IJ}$ et $\frac{IN}{IK}$:

D'une part $\frac{IM}{IJ} = \frac{7,2}{9,6} = \frac{3}{4}$; d'autre part $\frac{IN}{IK} = \frac{3}{4}$ donc $\frac{IM}{IJ}$ et $\frac{IN}{IK}$ sont égaux.

Les points I, M , J d'une part et I, N, K d'autre part sont alignés dans le même ordre.
En appliquant ***la réciproque du théorème de Thalès***, on peut conclure que
les droites (MN) et (JL) sont parallèles.

b) *Calculer la distance MN .*

Dans le triangle IMN, rectangle en I , appliquons le théorème de Pythagore :

$MN^2 = IM^2 + IN^2$
$MN^2 = 7{,}2^2 + 3^2$
$MN^2 = 60{,}24$ Donc $MN = \sqrt{60{,}84} = 7{,}8$ cm. **Le segment [MN] mesure 7,8 cm.**

PROBLÈME (12,5 points) :

A) Première partie

1) *Calculer les longueurs AE et AF.*
ABCD est un rectangle.
AE = AB + BE = 6 + 5 = 11 cm **AE = 11 cm** ; AF = AD − DF = 10 − 5 = 5 cm **AF = 5 cm**

2) *Calculer l' aire du triangle BEC :*
$\mathcal{A}_{BEC} = \frac{BE \times BC}{2} = \frac{10 \times 5}{2} = 25$ cm² donc $\mathcal{A}_{BEC}$ **= 25 cm²**

3) *Calculer l' aire du triangle CDF et en déduire l' aire du quadrilatère ABCF .*
$\mathcal{A}_{CDF} = \frac{CD \times DF}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$ cm² donc $\mathcal{A}_{CDF}$ **= 15 cm²**

$\mathcal{A}_{ABCF} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{CDF} = 6 \times 10 - 15 = 45$ cm³ donc $\mathcal{A}_{ABCF} = 45$ cm³

B) Deuxième partie

Dans cette partie , on a maintenant* BE = DF = *x *(x est un nombre quelconque compris entre 0 et 10)*

1) *Démontrer que l' aire du triangle BEC est égale à 5x .*
$\mathcal{A}_{BEC} = \frac{BE \times BC}{2} = \frac{10 \times x}{2} = 5x$ cm² donc $\mathcal{A}_{BEC}$ **= 5*x* cm²**

2) *Exprimer l' aire du triangle CDF en fonction de x et démontrer que l'aire du quadrilatère ABCF est égale à 60 − 3x .*
$\mathcal{A}_{CDF} = \frac{CD \times DF}{2} = \frac{6 \times x}{2} = 3x$ cm² donc $\mathcal{A}_{CDF}$ **= 3*x* cm²**
$\mathcal{A}_{ABCF} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{CDF} = 6 \times 10 - 3x = 60 - 3x$ cm³ donc $\mathcal{A}_{ABCF}$ **= 60 − 3*x* cm³**

3) *Tracer la représentation graphique de la fonction f* définie par $f(x) = 5x$.
***f* est une fonction linéaire** : **sa représentation graphique est une droi**te passant par l'origine du repère et –*par exemple*- par le point de coordonnées A(5 ; 25).

4) On considère la fonction g définie par $g(x) = 60 - 3x$. Calculer $g(0)$ et $g(10)$.
g(0) = 60 ; **g(10) = 30**
Tracer la représentation graphique de la fonction $g(x) = 60 - 3x$.
g **est une fonction affine** : **sa représentation graphique est une droite** ne passant pas par l'origine du repère, mais -*par exemple*- par les points B(0;60) et C(10 ; 30).

5) Par lecture graphique, *déterminer la valeur de x* pour laquelle l' aire du triangle BEC et l'aire du quadrilatère ABCF sont égales. Faire apparaître le trait justificatif.
Réponse sur le graphique

6) *Retrouver la réponse* de la question précédente en écrivant une équation puis en la résolvant .
$\mathcal{A}_{BEC} = \mathcal{A}_{ABCF}$ entraîne que $5x = 60 - 3x$ donc $5x + 3 = 60x$ soit $x = \frac{60}{8} = 7{,}5$

Lorsque x vaut 7,5 cm , les deux aires sont égales.
7) Pour la valeur de x trouvée, calculer *l' aire du triangle BEC et l' aire du quadrilatère ABCF*
Si $x = 7{,}5$ cm, $\mathcal{A}_{BEC} = \mathcal{A}_{ABCF}$ donc $\mathcal{A}_{BEC} = \mathcal{A}_{ABCF} = 5x = 5 \times 7{,}5 = 37{,}5$ cm².

$\mathcal{A}_{BEC} = \mathcal{A}_{ABCF}$ **= 37,5 cm²**